

# Calcul des coefficients de traînée et de portance au moyen d'un schéma distribuant le résidu.

M. Mezine<sup>(‡,\*)</sup>, R. Abgrall<sup>\*</sup>, Ch. Berthon<sup>(‡,\*)</sup>, B. Nkonga<sup>(\*,‡)</sup>

\* MAB, Université de Bordeaux 1

‡ Inria FutURs, Projet Scalaplix

Pourquoi un nouveau schéma ?

# Motivations

- Maillage non structuré (géométrie complexe)
- Difficulté à contrôler la qualité du maillage,
- Précision d'ordre deux au moins, même en maillage peu régulier
- Ecoulement à faible nombre de Mach  
( $v \leq 30m/s$  i.e.  $M \leq 0.1$ )
- Schéma compact, parallélisation aisée

# Plan

- Schéma distribuant le résidu
- Préconditionnement faible Mach
- Résultats

**Schémas distributifs** : pourquoi, comment.

# Schémas Distributifs : cadre général

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

avec C. I. et C. L.

# Schémas Distributifs : cadre général

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

avec C. I. et C. L.

ou

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ avec C.L.}$$

# Schémas Distributifs : cadre général

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

avec C. I. et C. L.

ou

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ avec C.L.}$$

systemes symétrisables

# Problèmes non linéaires

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{F}(W) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \text{ avec C. I. et C. L.}$$

$W = (\rho, \rho \vec{u}, E)^T$ ,  $F$  flux + équation d'état des gaz parfaits

# Problèmes non linéaires

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{F}(W) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \text{ avec C. I. et C. L.}$$

$W = (\rho, \rho \vec{u}, E)^T$ ,  $F$  flux + équation d'état des gaz parfaits

Passage linéaire–non linéaire : linéarisation  
(Roe–Deconinck–Struijs)

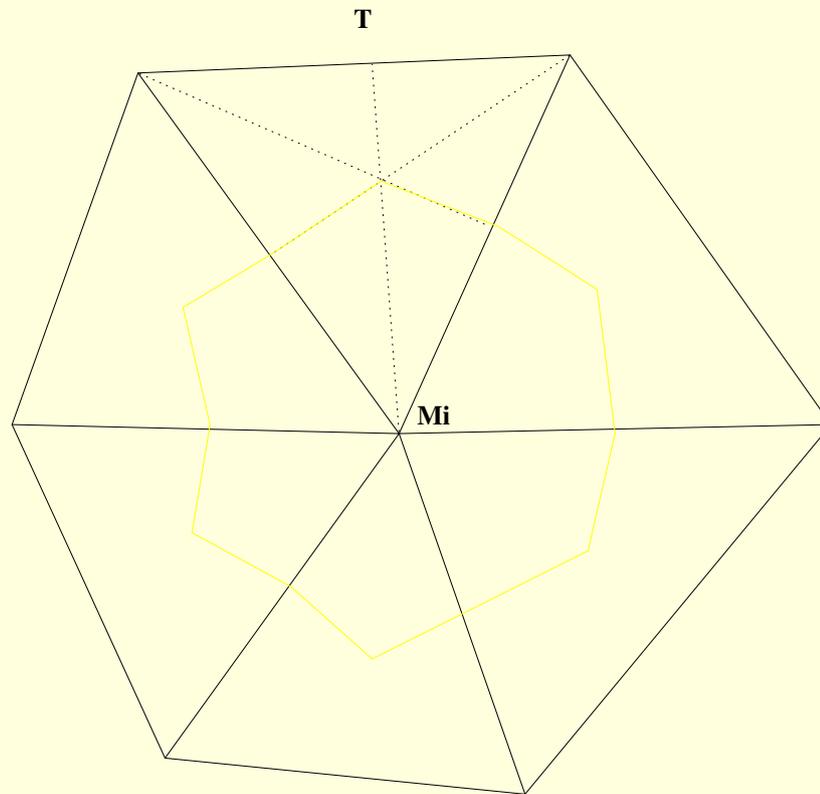
# Performance des Méthode Volumes Finis

# Performance des Méthode Volumes Finis

- $C_i$  volume de contrôle,  $\Omega = \bigcup_i C_i$

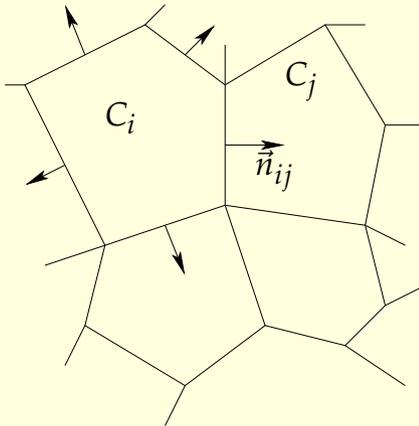
# Performance des Méthode Volumes Finis

- $C_i$  volume de contrôle,  $\Omega = \bigcup_i C_i$



# Performance des Méthode Volumes Finis

- $C_i$  volume de contrôle,  $\Omega = \bigcup_i C_i$
- $\int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W(x)) \cdot \vec{n}_{ext} d\Gamma(x) = 0$
- $\sum_{j \text{ voisin } i} \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathcal{F}(W(x)) \cdot \vec{n}_{ij} d\Gamma(x) = 0$



# Performance des Méthode Volumes Finis

- $C_i$  volume de contrôle,  $\Omega = \bigcup_i C_i$
- $\int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W(x)) \cdot \vec{n}_{ext} d\Gamma(x) = 0$
- $\sum_{j \text{ voisin } i} \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathcal{F}(W(x)) \cdot \vec{n}_{ij} d\Gamma(x) = 0$
- $W_i \approx \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} W(x) dx$

# Performance des Méthode Volumes Finis

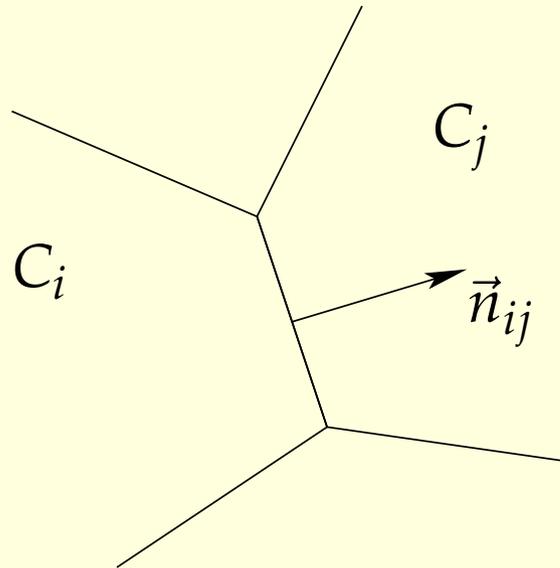
- $C_i$  volume de contrôle,  $\Omega = \bigcup_i C_i$
- $\int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W(x)) \cdot \vec{n}_{ext} d\Gamma(x) = 0$   
 $\sum_{j \text{ voisin } i} \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathcal{F}(W(x)) \cdot \vec{n}_{ij} d\Gamma(x) = 0$
- $W_i \approx \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} W(x) dx$
- Evaluation des flux numériques  
 $\int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathcal{F}(W(x)) \cdot \vec{n}_{ij} d\Gamma(x)$

# Quelques inconvénients

- Qualité dépendante du maillage, approche monodimensionnelle

# Quelques inconvénients

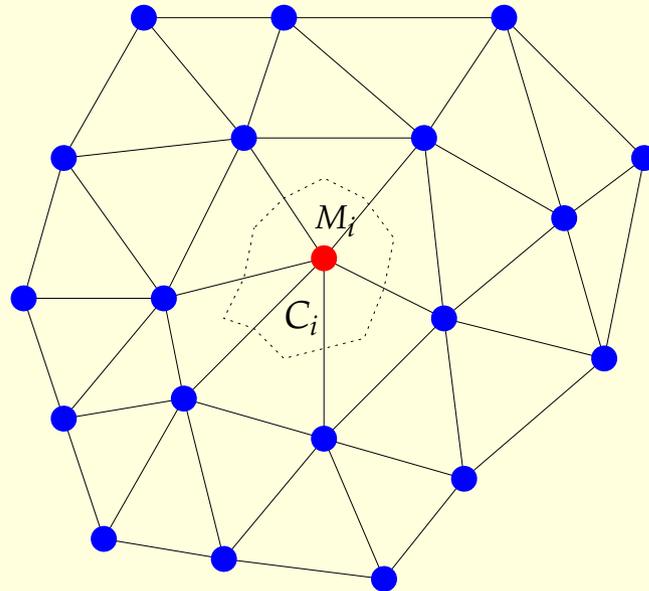
- Qualité dépendante du maillage, approche monodimensionnelle



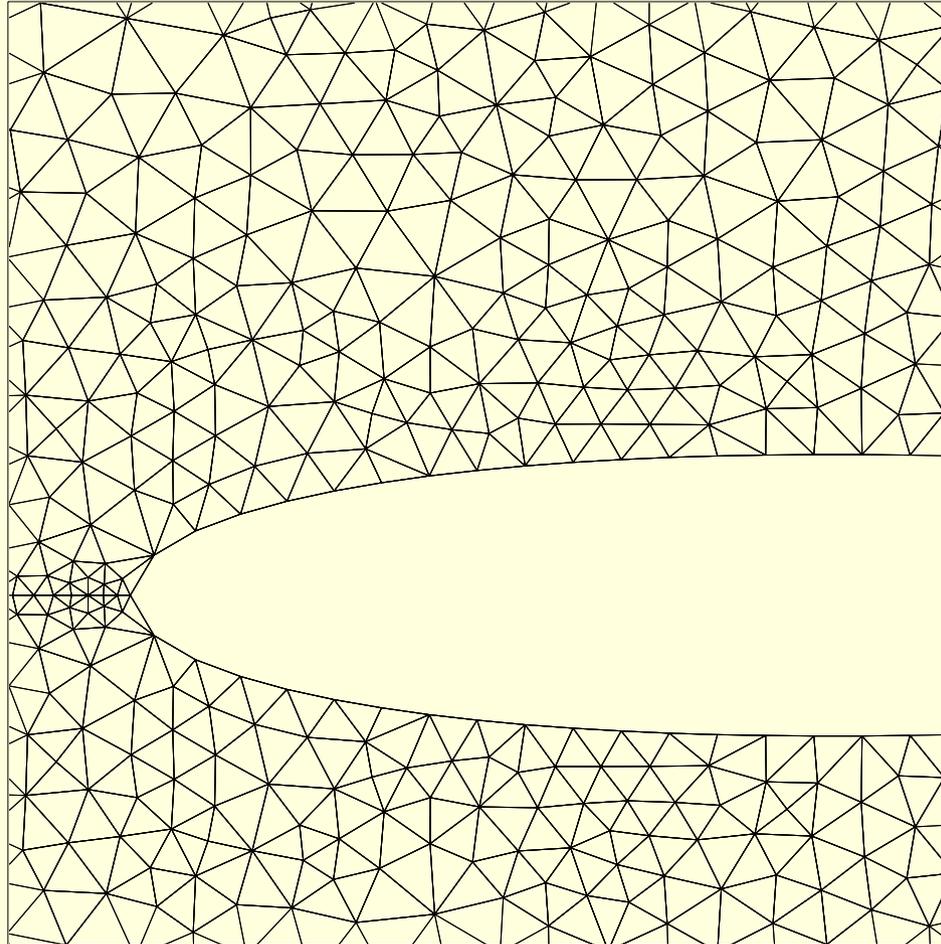
- Augmentation de l'ordre de précision (MUSCL, WENO, ...) → augmentation de la taille de la molécule de calcul

# Quelques inconvénients

- Qualité dépendante du maillage, approche monodimensionnelle
- Augmentation de l'ordre de précision (MUSCL, WENO, ...) → augmentation de la taille de la molécule de calcul



Un exemple: aile Naca 0012,  
 $M_\infty = 0.85, \alpha = 1^\circ$



# Nombre de Mach

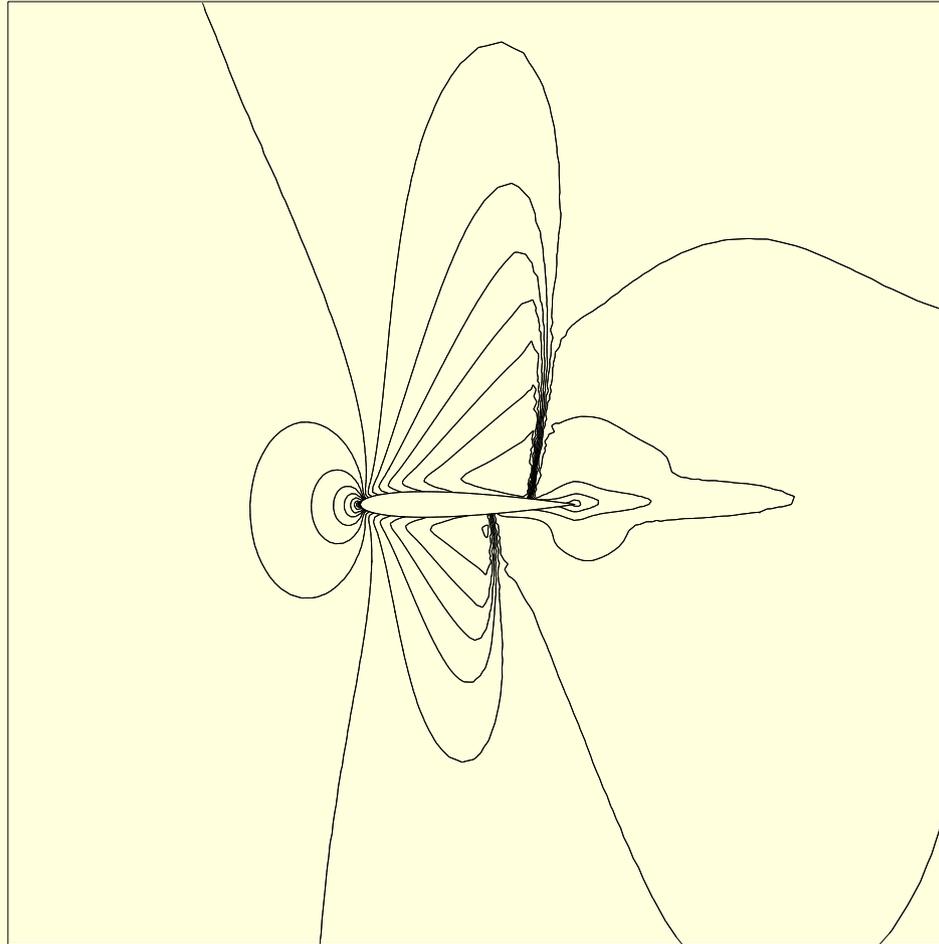


Schéma de Roe

# Schémas Distributifs : motivations

# Schémas Distribuifs : motivations

- Méthode vraiment multidimensionnelle

# Schémas Distributifs : motivations

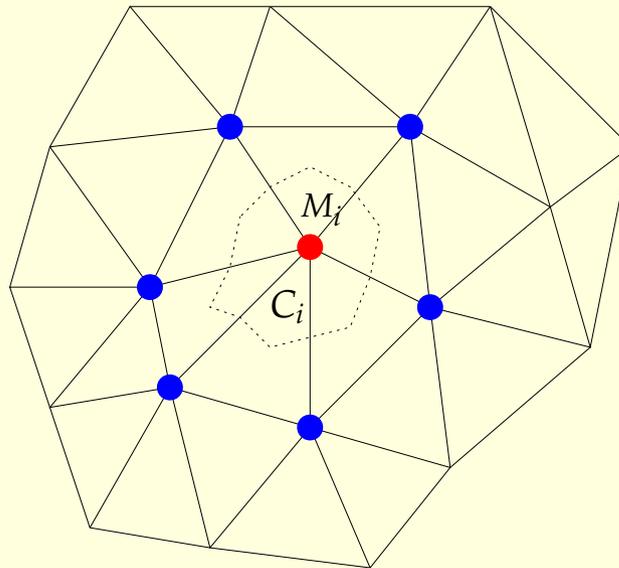
- Méthode vraiment multidimensionnelle
- Schémas précis sur des maillages non réguliers

# Schémas Distributifs : motivations

- Méthode vraiment multidimensionnelle
- Schémas précis sur des maillages non réguliers
- Molécule de calcul la plus compacte possible (parallélisme facile)

# Schémas Distributifs : motivations

- Méthode vraiment multidimensionnelle
- Schémas précis sur des maillages non réguliers
- Molécule de calcul la plus compacte possible (parallélisme facile)



# Construction de schémas : cas scalaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\lambda} \cdot \nabla u = 0 \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ + \text{ Conditions aux Limites} \end{array} \right.$$

# Construction de schémas : cas scalaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\lambda} \cdot \nabla u = 0 \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ + \text{ Conditions aux Limites} \end{array} \right.$$

- Maillages triangulaires,  $T$ ,  $M_i$  ou  $i$

# Construction de schémas : cas scalaire

$$\begin{cases} \vec{\lambda} \cdot \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ + \text{ Conditions aux Limites} \end{cases}$$

- Maillages triangulaires,  $T$ ,  $M_i$  ou  $i$
- Inconnues stockées aux sommets du maillage

$$u_i \approx u(M_i)$$

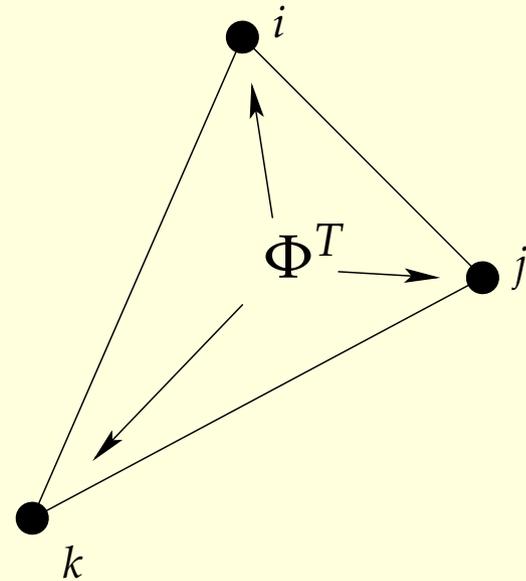
# Méthode–Problèmes stationnaires

- Evaluation du résidu  $\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx$

# Méthode–Problèmes stationnaires

- Evaluation du résidu  $\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx$
- Distribution du résidu

$$\Phi^T \rightarrow \begin{cases} \Phi_i^T = \beta_i^T \Phi^T \\ \Phi_j^T = \beta_j^T \Phi^T \\ \Phi_k^T = \beta_k^T \Phi^T \end{cases}$$



# Méthode–Problèmes stationnaires

- Evaluation du résidu  $\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx$
- Distribution du résidu

$$\Phi^T \rightarrow \begin{cases} \Phi_i^T & = \beta_i^T \Phi^T \\ \Phi_j^T & = \beta_j^T \Phi^T \\ \Phi_k^T & = \beta_k^T \Phi^T \end{cases}$$

- Mise à jour des inconnues

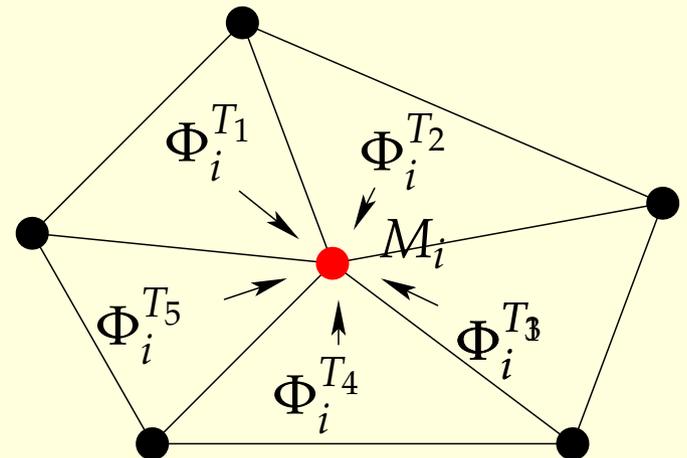
# Méthode–Problèmes stationnaires

- Evaluation du résidu  $\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx$
- Distribution du résidu

$$\Phi^T \rightarrow \begin{cases} \Phi_i^T = \beta_i^T \Phi^T \\ \Phi_j^T = \beta_j^T \Phi^T \\ \Phi_k^T = \beta_k^T \Phi^T \end{cases}$$

- Mise à jour des inconnues

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{T, M_i \in T} \Phi_i^T$$



# Principes de la distribution

- Conservation

$$\sum_{M_i \in T} \Phi_i^T = \Phi^T \text{ ou } \sum_{M_i \in T} \beta_i^T = 1$$

# Principes de la distribution

- Conservation

$$\sum_{M_i \in T} \Phi_i^T = \Phi^T \text{ ou } \sum_{M_i \in T} \beta_i^T = 1$$

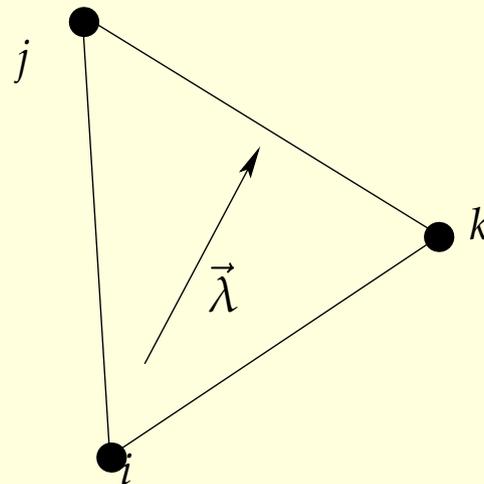
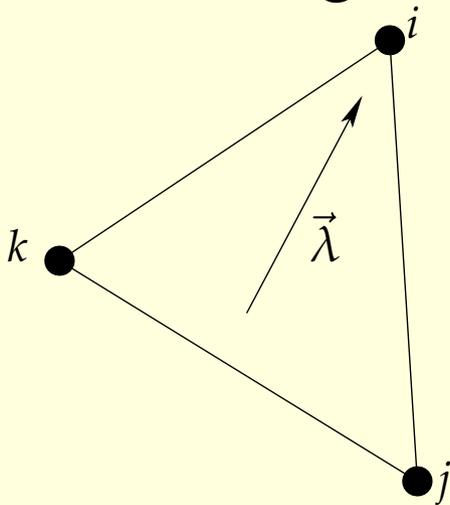
- Décentrage

# Principes de la distribution

- Conservation

$$\sum_{M_i \in T} \Phi_i^T = \Phi^T \text{ ou } \sum_{M_i \in T} \beta_i^T = 1$$

- Décentrage



# Principes de la distribution

- Conservation

$$\sum_{M_i \in T} \Phi_i^T = \Phi^T \text{ ou } \sum_{M_i \in T} \beta_i^T = 1$$

- Décentrage
- Monotonie

# Principes de la distribution

- Conservation

$$\sum_{M_i \in T} \Phi_i^T = \Phi^T \text{ ou } \sum_{M_i \in T} \beta_i^T = 1$$

- Décentrage
- Monotonie
- Linear Preserving (LP) : schémas précis. Ici **ordre 2 à convergence.**

$$\Phi_i^T = \beta_i^T \Phi^T, \text{ avec } \beta_i^T \text{ borné uniformément}$$

# Principes de la distribution

- Conservation

$$\sum_{M_i \in T} \Phi_i^T = \Phi^T \text{ ou } \sum_{M_i \in T} \beta_i^T = 1$$

- Décentrage
- Monotonie
- Linear Preserving (LP) : schémas précis. Ici **ordre 2 à convergence.**

$$\Phi_i^T = \beta_i^T \Phi^T, \text{ avec } \beta_i^T \text{ borné uniformément}$$

- Compacité

# Exemples de schémas

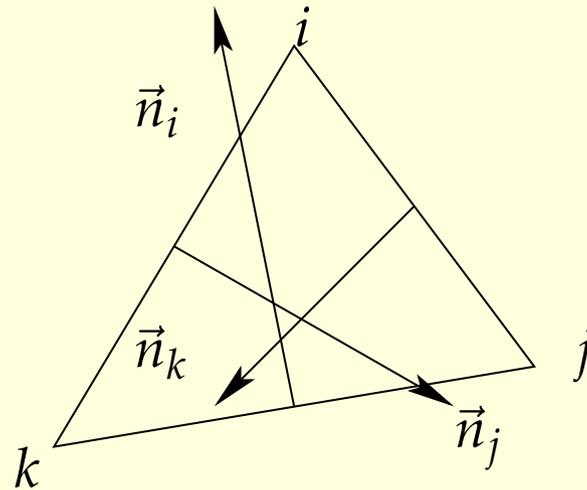
$$\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx = \sum_{M_i \in T} k_i u_i$$

$$k_i = \frac{\vec{\lambda} \cdot \vec{n}_i}{2}$$

# Exemples de schémas

$$\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx = \sum_{M_i \in T} k_i u_i$$

$$k_i = \frac{\vec{\lambda} \cdot \vec{n}_i}{2}$$



# Exemples de schémas

$$\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx = \sum_{M_i \in T} k_i u_i$$

$$k_i = \frac{\vec{\lambda} \cdot \vec{n}_i}{2}$$

- Narrow

$$\Phi_i^N = \beta_i^N \Phi^T = k_i^+ (u_i - \tilde{u})$$

# Exemples de schémas

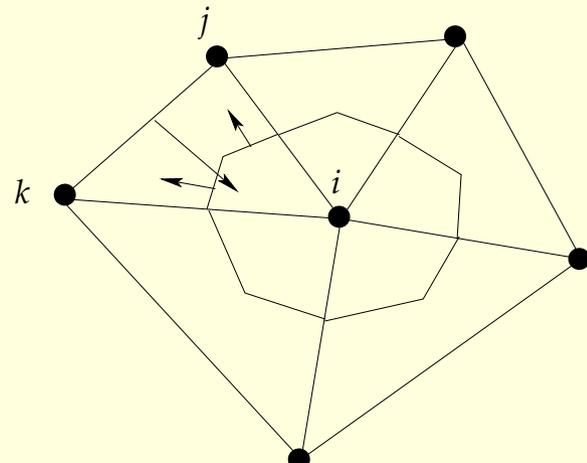
$$\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx = \sum_{M_i \in T} k_i u_i$$

$$k_i = \frac{\vec{\lambda} \cdot \vec{n}_i}{2}$$

- Narrow

$$\Phi_i^N = \beta_i^N \Phi^T = k_i^+ (u_i - \tilde{u})$$

- Volumes Finis



# Exemples de schémas

$$\Phi^T = \int_T \vec{\lambda} \cdot \nabla u^h dx = \sum_{M_i \in T} k_i u_i$$

$$k_i = \frac{\vec{\lambda} \cdot \vec{n}_i}{2}$$

- Narrow

$$\Phi_i^N = \beta_i^N \Phi^T = k_i^+ (u_i - \tilde{u})$$

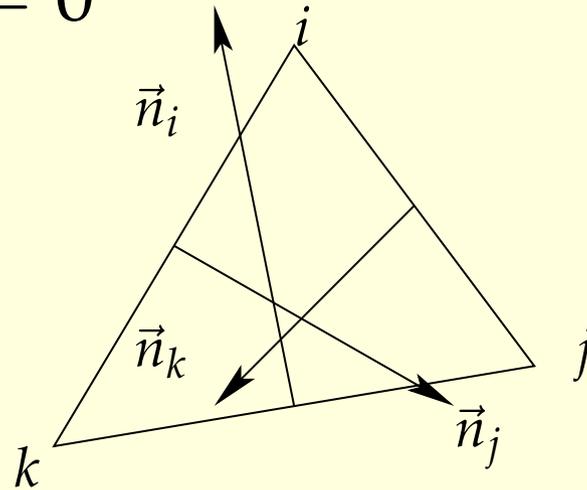
- Volumes Finis
- **LDA**

$$\Phi_i^{LDA} = -k_i^+ \left( \sum_j k_j^- \right)^{-1} \Phi^T \equiv \beta_i^T \Phi^T$$

# Schéma LDA «système»

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$K_i = A n_x^i + B n_y^i$$



$$\Phi_i^{LDA} = -K_i^+ \left( \sum_j K_j^- \right)^{-1} \Phi^T \equiv \mathbf{f}_i^T \Phi^T$$

# Algorithmme

Schéma LDA

# Algorithme

## Schéma LDA

BOUCLE 1: Pseudo temps

# Algorithme

## Schéma LDA

BOUCLE 1: Pseudo temps

BOUCLE 2: Eléments

# Algorithme

## Schéma LDA

BOUCLE 1: Pseudo temps

BOUCLE 2: Eléments

- calcul des résidus  $\Phi_i^{LDA}$ ,  $\Phi_j^{LDA}$ ,  $\Phi_k^{LDA}$ ,  $\Phi_l^{LDA}$
- assemblage des contributions

# Algorithme

## Schéma LDA

BOUCLE 1: Pseudo temps

BOUCLE 2: Eléments

- calcul des résidus  $\Phi_i^{LDA}$ ,  $\Phi_j^{LDA}$ ,  $\Phi_k^{LDA}$ ,  $\Phi_l^{LDA}$
- assemblage des contributions

FIN BOUCLE 2

# Algorithme

## Schéma LDA

BOUCLE 1: Pseudo temps

BOUCLE 2: Eléments

- calcul des résidus  $\Phi_i^{LDA}$ ,  $\Phi_j^{LDA}$ ,  $\Phi_k^{LDA}$ ,  $\Phi_l^{LDA}$
- assemblage des contributions

FIN BOUCLE 2

FIN BOUCLE 1

# Préconditionnement faible Mach

- Problème classique assez mal compris

# Préconditionnement faible Mach

- Problème classique assez mal compris
- Schémas bien adaptés au subsonique/transonique

# Préconditionnement faible Mach

- Problème classique assez mal compris
- Schémas bien adaptés au subsonique/transonique
- Instabilité numérique plus ou moins violente quand  $M \rightarrow 0$

# Préconditionnement faible Mach

- Problème classique assez mal compris
- Schémas bien adaptés au subsonique/transonique
- Instabilité numérique plus ou moins violente quand  $M \rightarrow 0$
- Solution de Henriques et Gato (Portugal), pas de paramètre.

# Préconditionnement : méthode

- Symétrisation du système,
- passage dans un repère lié à la vitesse
- utilisation des variables primitives
- divers changements de variables

# Systeme symétrisé

$$\hat{T} \frac{\partial W}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial W}{\partial \zeta} + \hat{C} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \hat{C} \frac{\partial W}{\partial \tau} = 0,$$

avec

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$\hat{T} = \check{L}\check{P}\check{R} = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 - 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

# Systeme preconditionné

$$\frac{\partial U}{\partial t} + R \left( \hat{A} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \hat{C} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \hat{C} \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) = 0,$$

où

$$R = \frac{\partial U}{\partial W} \hat{T}^{-1} = \frac{\partial U}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \check{Q}} \frac{\partial \check{Q}}{\partial W} \hat{T}^{-1}.$$

et

$$\partial W = \check{L} \partial \check{Q} = (\check{u} \partial \check{v}, -\partial p / \rho, \check{u} \partial \check{w}, (\gamma - 1) T \partial s, \partial H - T \partial s)^T,$$

avec la matrice  $\check{L}$

$$\check{L} = \check{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & M & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

# Éléments propres

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = n_{\zeta}, \\ \lambda_4 = \frac{1}{2}n_{\zeta}M^2 + \frac{1}{2}\sqrt{n_{\zeta}^2M^2(M^2 - 4) + 4\|\vec{n}\|^2}, \\ \lambda_5 = \frac{1}{2}n_{\zeta}M^2 - \frac{1}{2}\sqrt{n_{\zeta}^2M^2(M^2 - 4) + 4\|\vec{n}\|^2}. \end{array} \right.$$

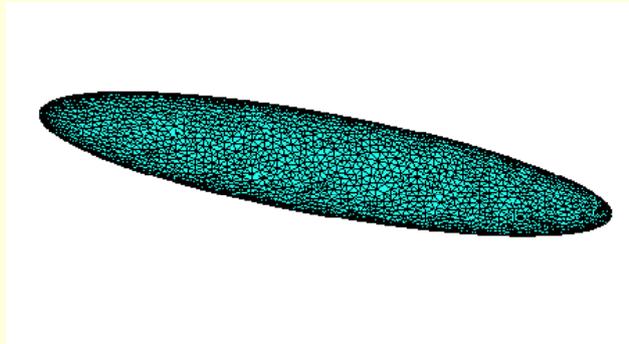
# Schéma

Appliquer LDA au système préconditionné . . .

# Résultats numériques

Géométrie du dirigeable

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a = 1.37/2, b = 1.37/12$$



# Maillages

Maillage	Sommets	Tétraèdres
1	33 869	188 909
2	106 437	596 560
3	140 265	796 509

Etat infini amont

$$\rho_{\infty} = 1.225 \text{ kg.m}^{-3}, \quad ||\vec{u}_{\infty}|| = 34.0252 \text{ m.s}^{-1},$$
$$p_{\infty} = 101396 \text{ Pa.}$$

calculs à 0 et 5 degrés d'incidence.

# 0° d'incidence, Mach, Coupe $z = 0$ , Maillage 1

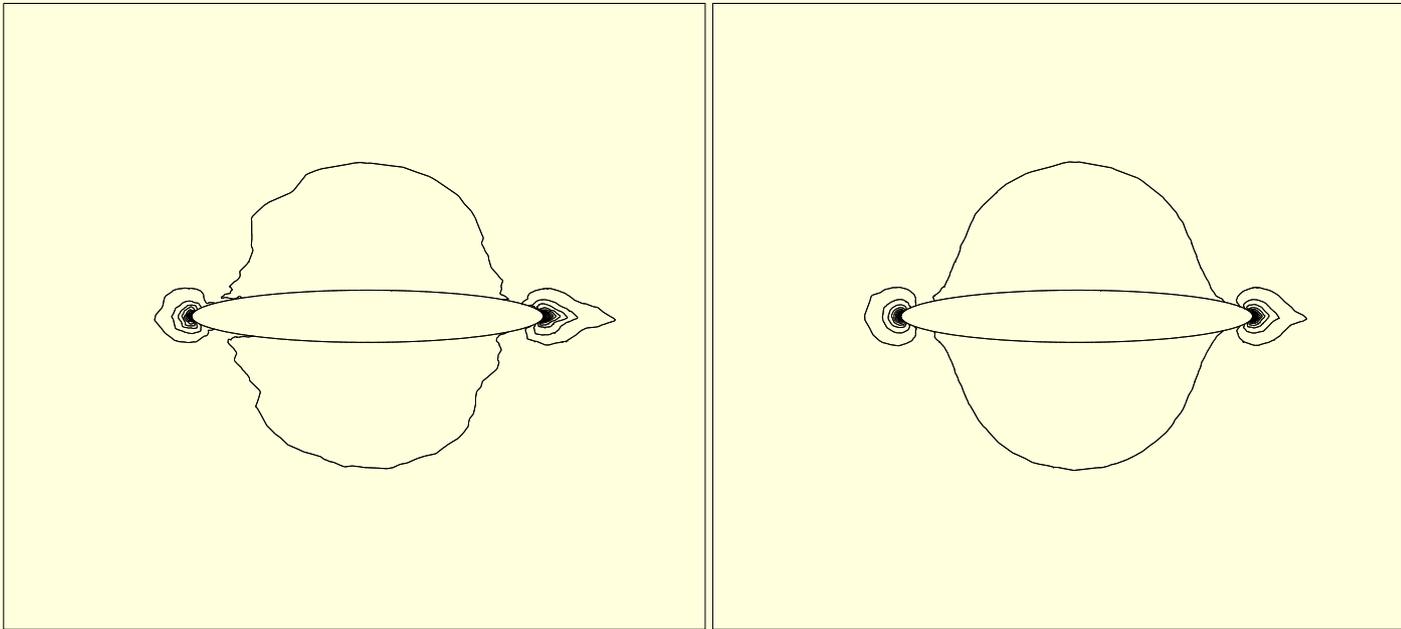


Figure 0: Gauche : schéma LDA,  $0.01858 \leq M \leq 0.10391$ . Droite : schéma LDA préconditionné,  $0.01152 \leq M \leq 0.10439$ .

# 0° d'incidence, Mach, Coupe $z = 0$ , Maillage 2

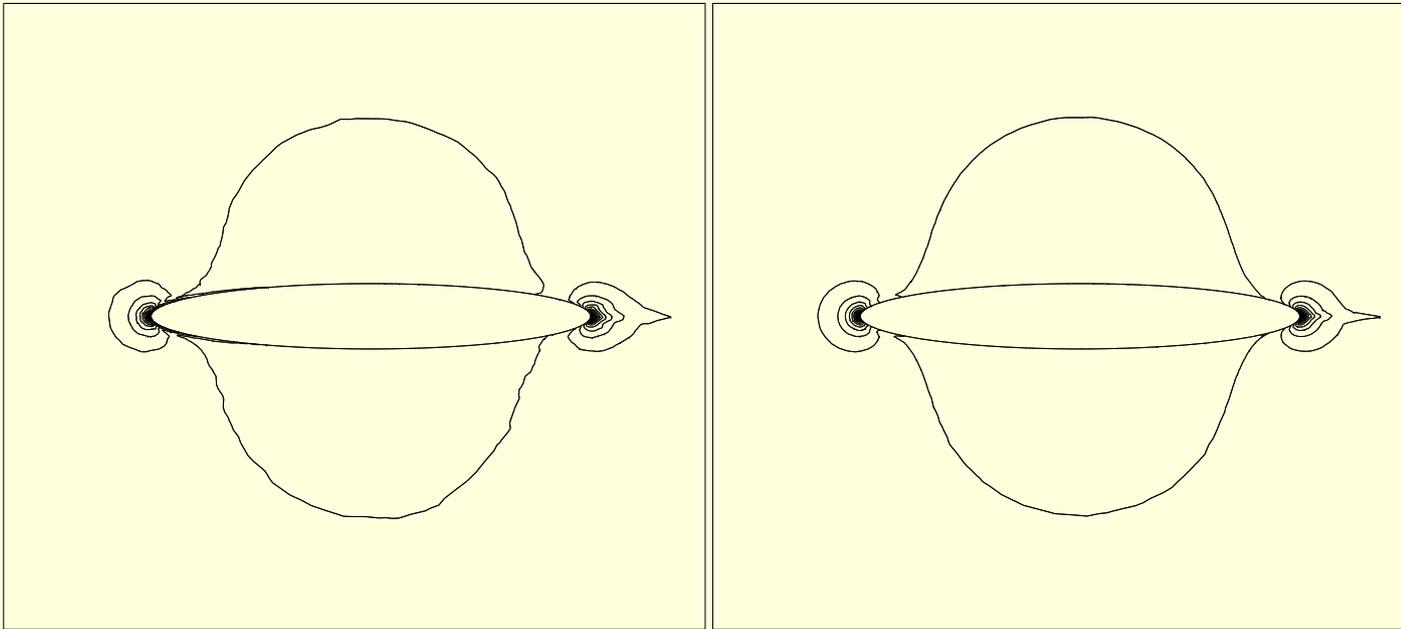


Figure 0: Gauche : schéma LDA,  $0.00928 \leq M \leq 0.10429$ . Droite : schéma LDA préconditionné,  $0.01277 \leq M \leq 0.10448$ .

# 0° d'incidence, Coupe $z = 0$ , Maillage 3

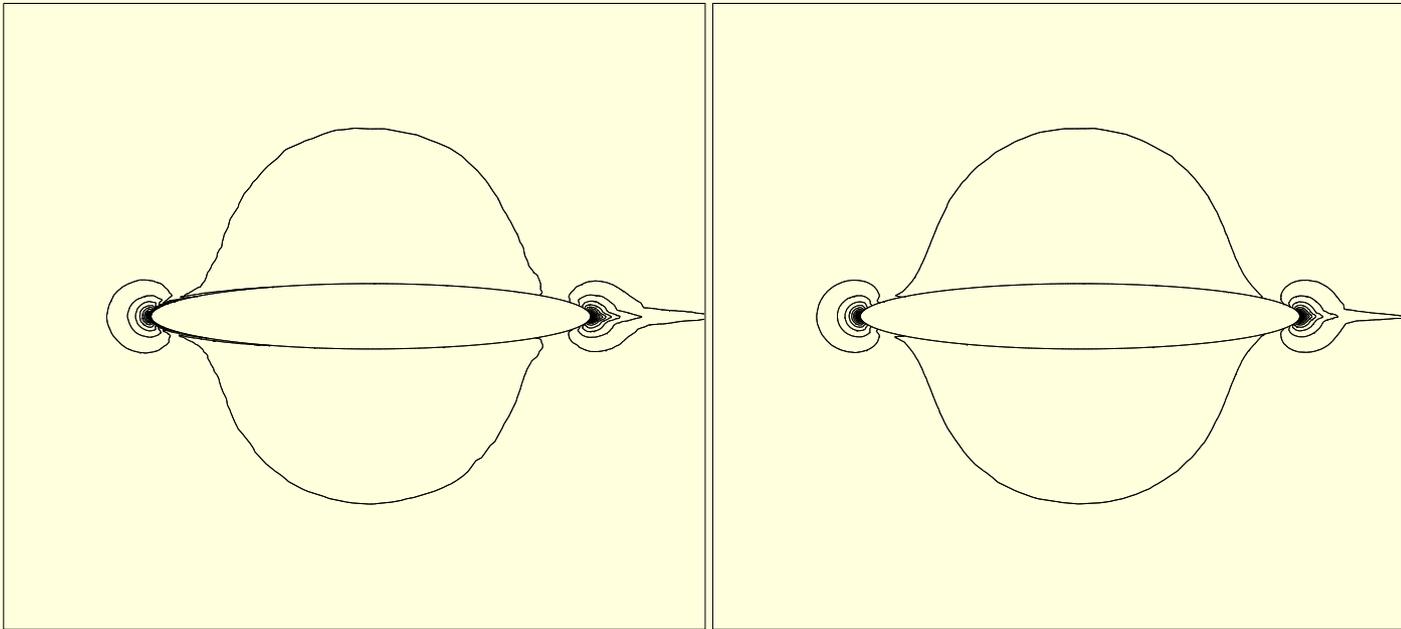


Figure 0: Gauche : schéma LDA,  $0.01180 \leq M \leq 0.10429$ . Droite : schéma LDA préconditionné,  $0.01093 \leq M \leq 0.10444$ .

# Comparaison

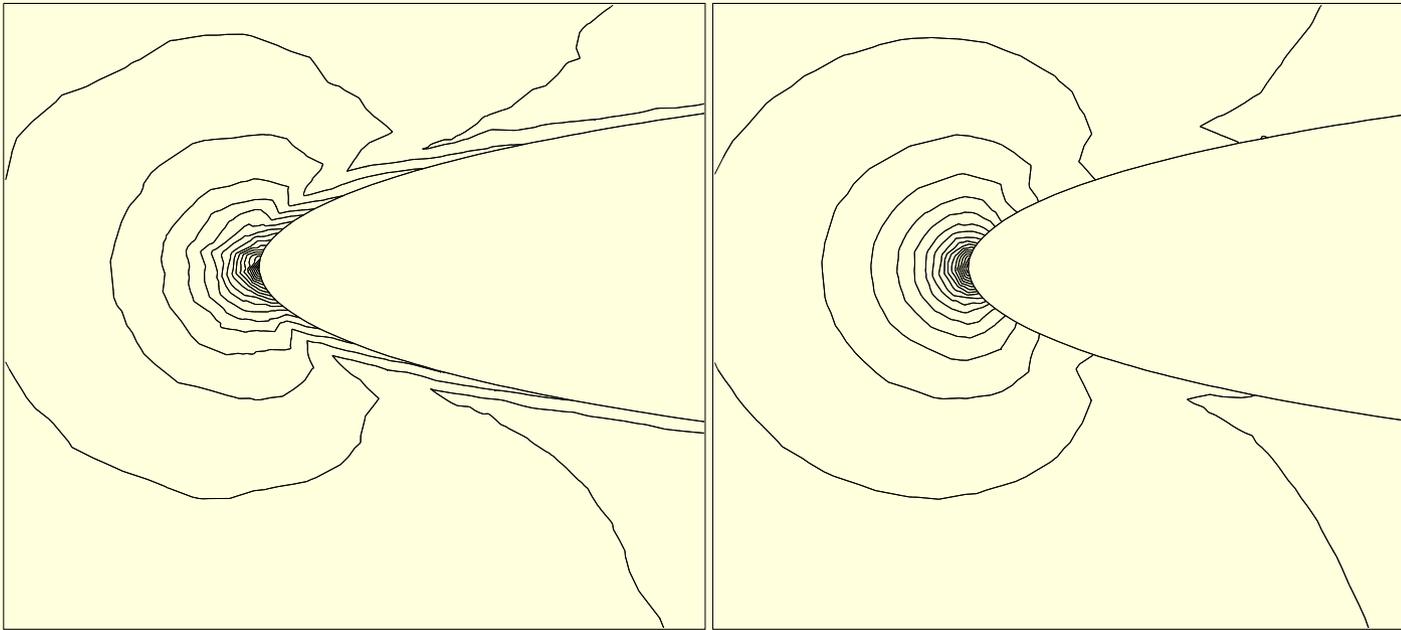


Figure 0: Nombre de Mach, zoom sur le plan  $z = 0$ . Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

# Entropie, Maillage 1

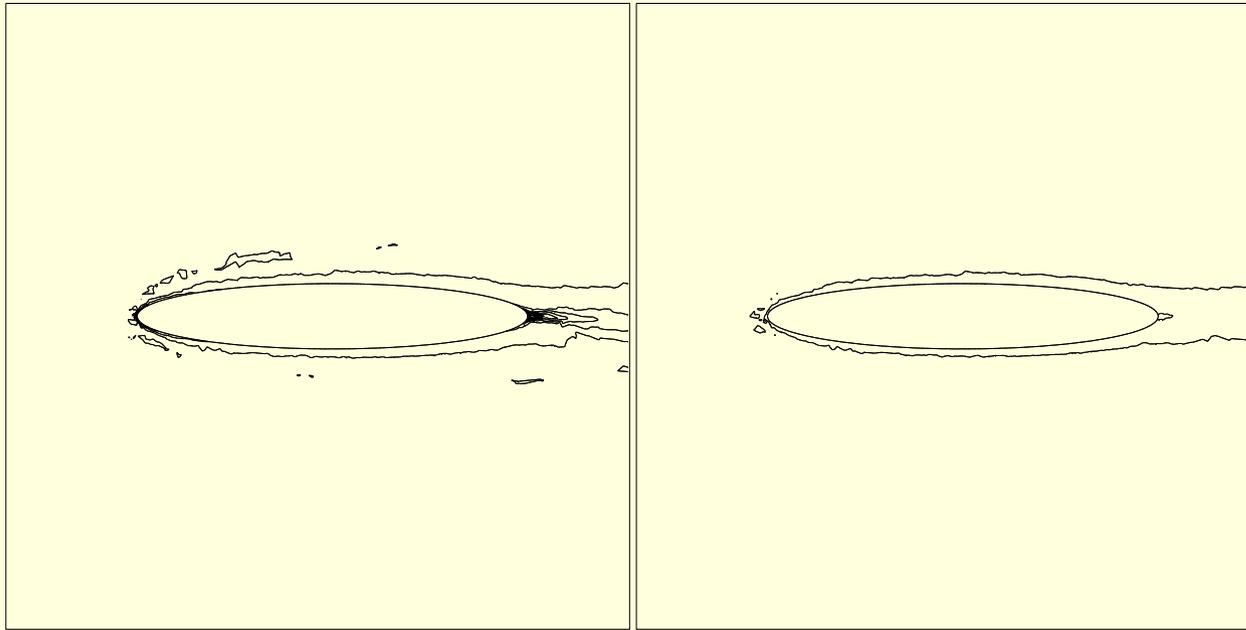


Figure 0: Gauche : schéma LDA,  $-0.471221 \leq S \leq -0.467294$ . Droite : schéma LDA préconditionné,  $-0.471092 \leq S \leq -0.4707$ .

# Entropie, Maillage 2

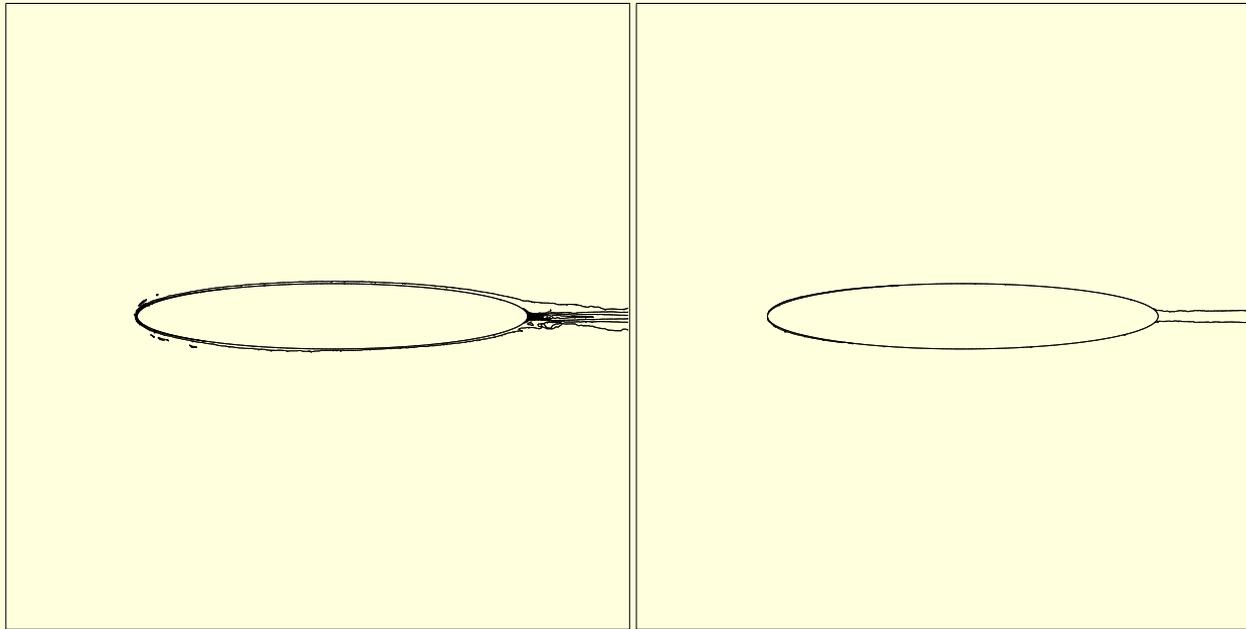


Figure 0: Gauche : schéma LDA,  $-0.471515 \leq S \leq -0.466042$ . Droite : schéma LDA préconditionné,  $-0.471119 \leq S \leq -0.470752$ .

# Entropie, Maillage 3

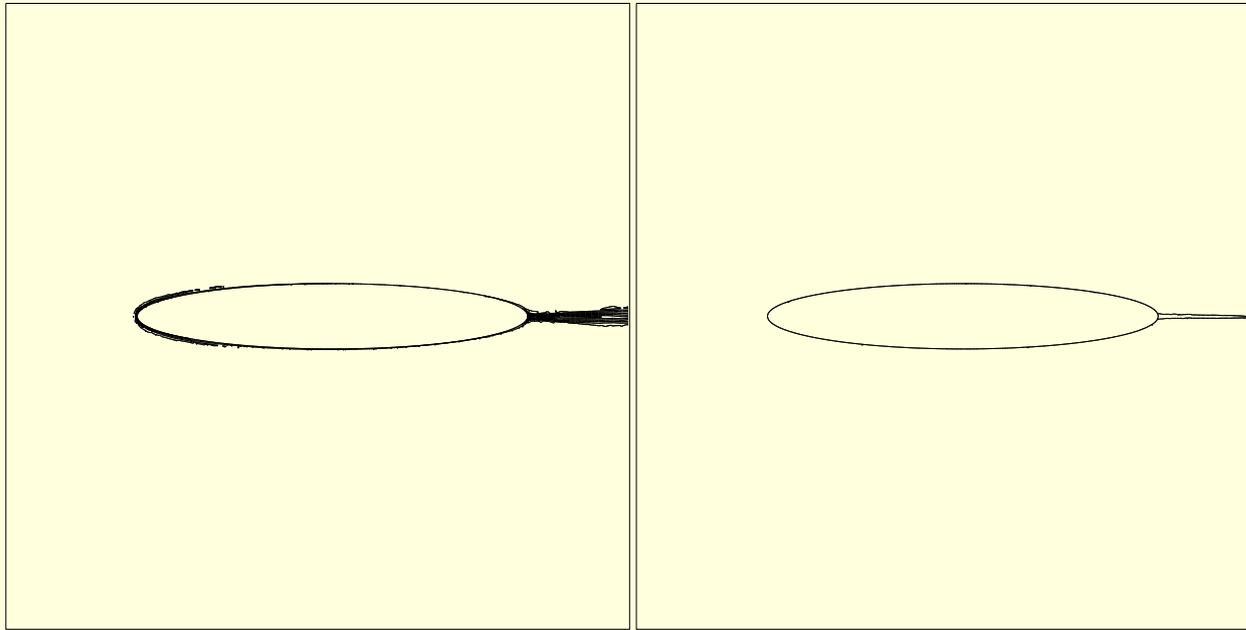


Figure 0: Gauche : schéma LDA,  $-0.471600 \leq S \leq -0.466647$ . Droite : schéma LDA préconditionné,  $-0.471118 \leq S \leq -0.470753$ .

# Convergence itérative

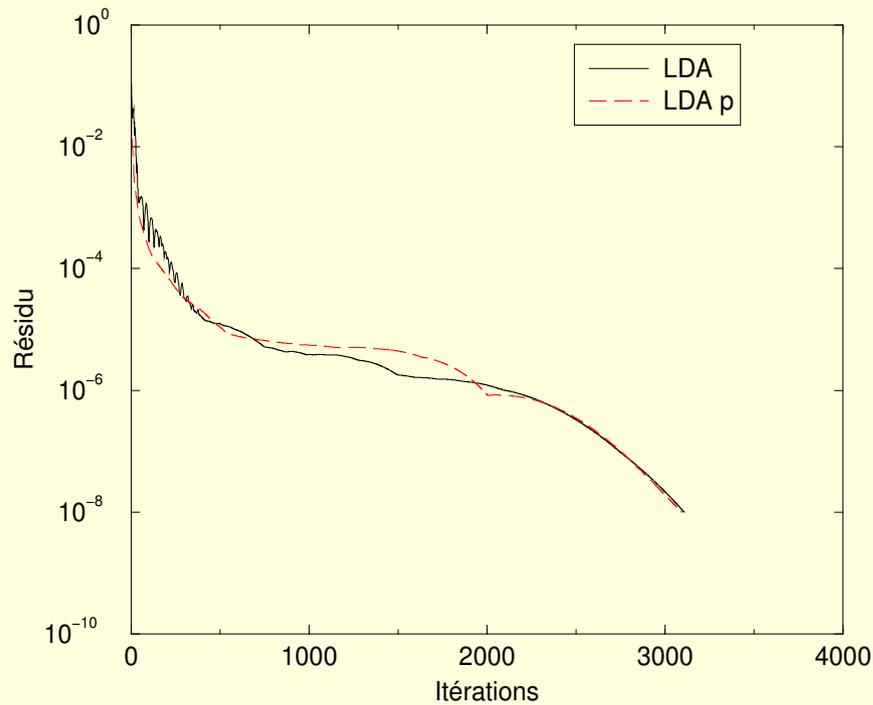


Figure 0: Courbes de convergence pour le maillage 1

# Vue de devant, maillage 1

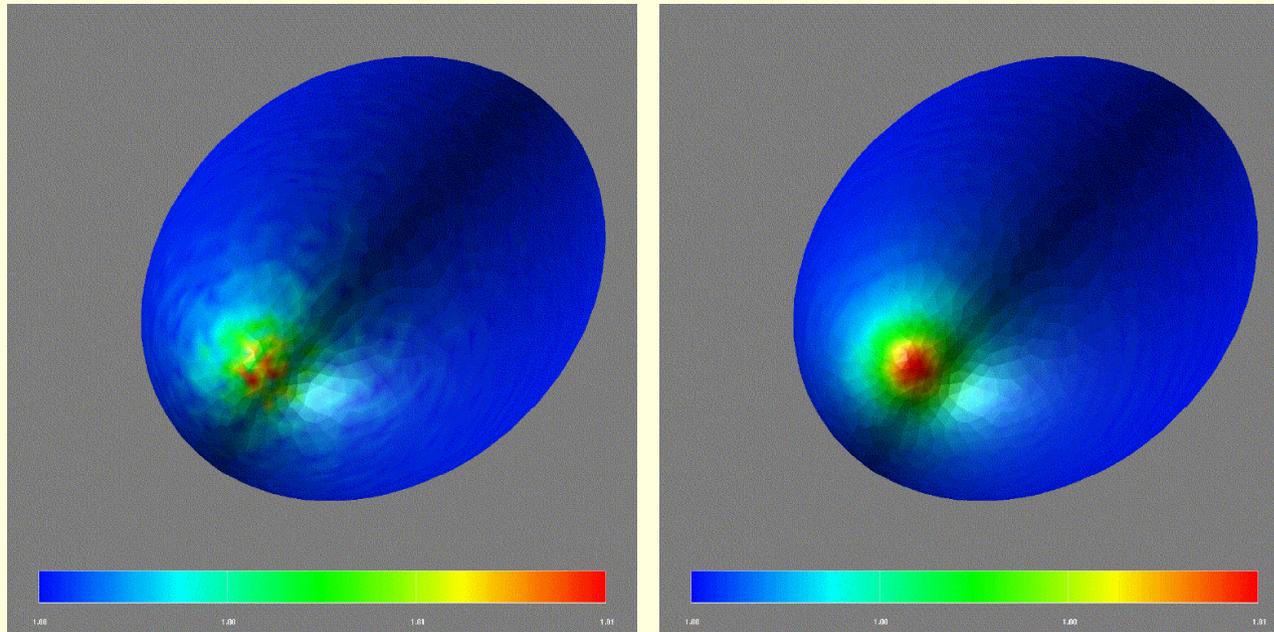


Figure 0: Pression  $\tilde{p} = p/p_\infty$ , Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

# Vue de devant, maillage 3

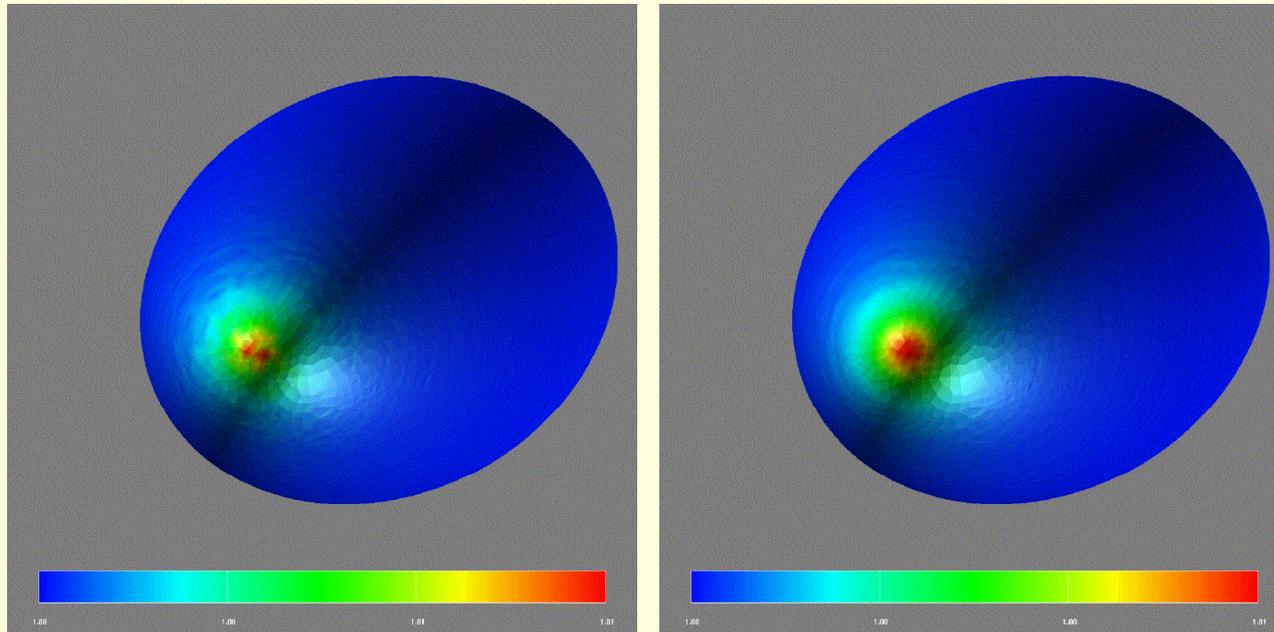


Figure 0: Pression  $\tilde{p} = p/p_\infty$ . Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

# Vue d'arrière, maillage 1

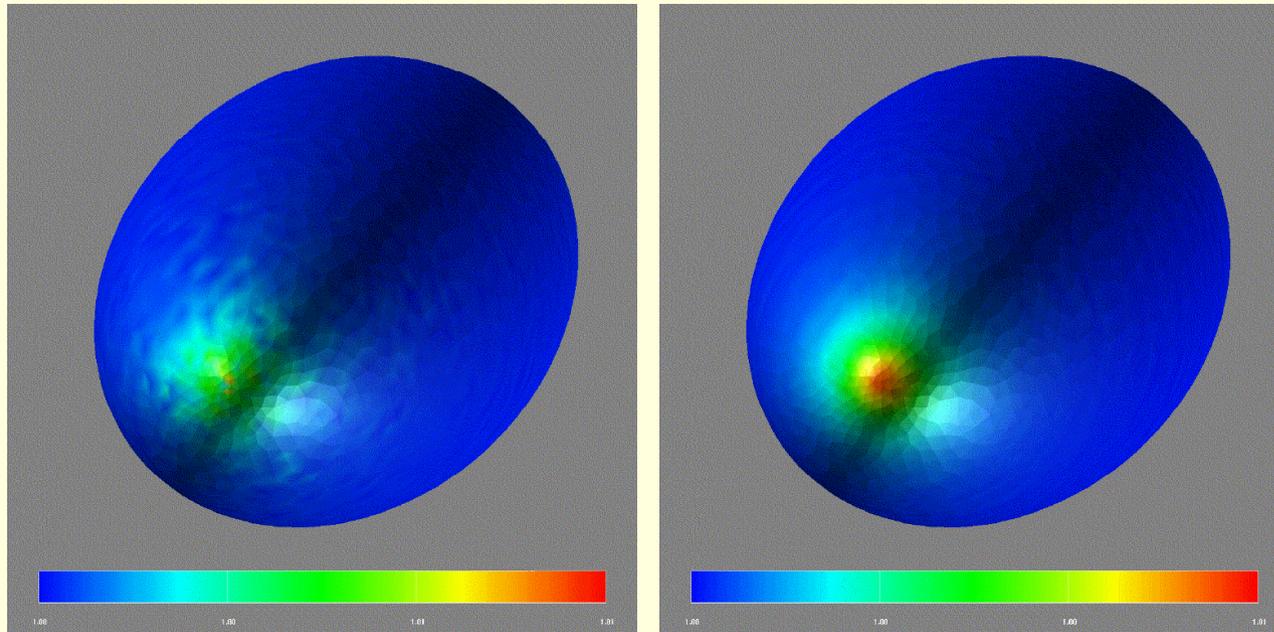


Figure 0: Pression  $\tilde{p} = p/p_\infty$ . Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

# Vue d'arrière, Maillage 3

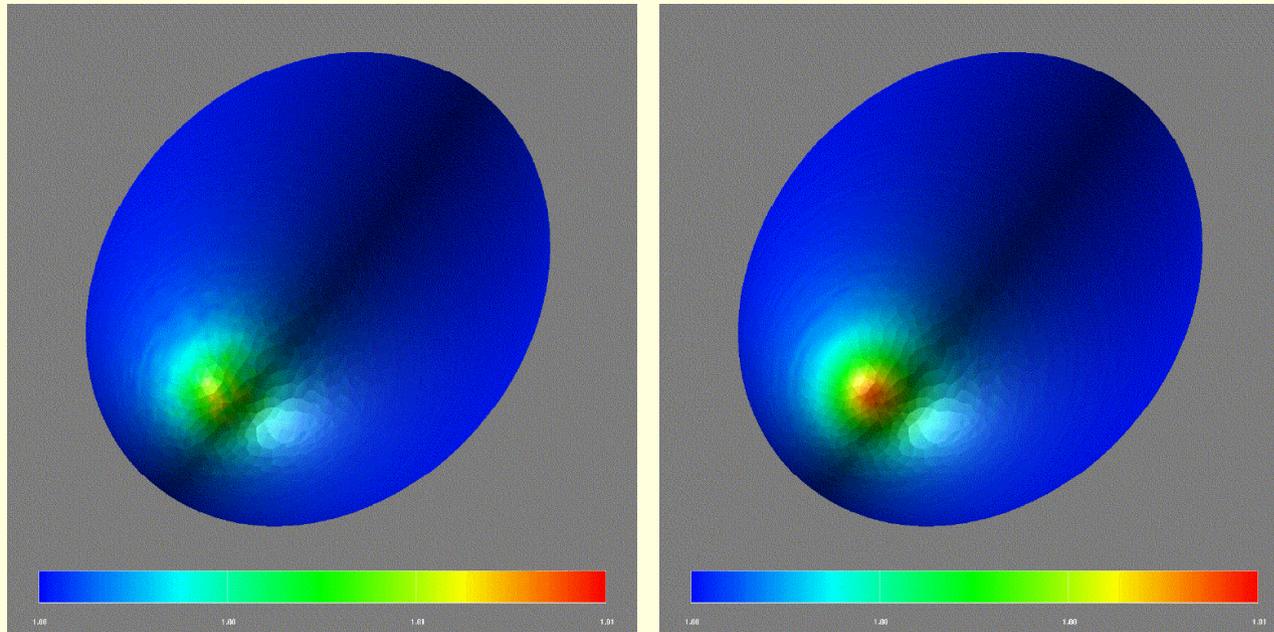


Figure 0: Pression  $\tilde{p} = p/p_\infty$ . Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

# Coefficients aérodynamiques

coefficients aérodynamiques  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  sont définis par

$$c_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_m}$$

$$c_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_m}$$

$$c_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_m}$$

# Coefficients aérodynamique, 0°, Maillage 1

Schéma	$C_x$	$C_y$	$C_z$
LDA	$1.35 \times 10^{-2}$	$6.23 \times 10^{-4}$	$2.72 \times 10^{-3}$
LDA p	$1.83 \times 10^{-3}$	$8.80 \times 10^{-5}$	$5.72 \times 10^{-4}$

# Coefficients aérodynamique, 0°, maillage 2

Schéma	$C_x$	$C_y$	$C_z$
LDA	$6.12 \times 10^{-3}$	$8.06 \times 10^{-4}$	$1.54 \times 10^{-5}$
LDA p	$1.87 \times 10^{-3}$	$4.30 \times 10^{-4}$	$3.13 \times 10^{-4}$

# Coefficients aérodynamique, 0°, maillage 3

Schéma	$C_x$	$C_y$	$C_z$
LDA	$4.85 \times 10^{-3}$	$5.55 \times 10^{-4}$	$7.84 \times 10^{-5}$
LDA p	$1.42 \times 10^{-3}$	$2.42 \times 10^{-5}$	$1.37 \times 10^{-4}$

# Incidence : $5^\circ$ , vue avant, maillage 3

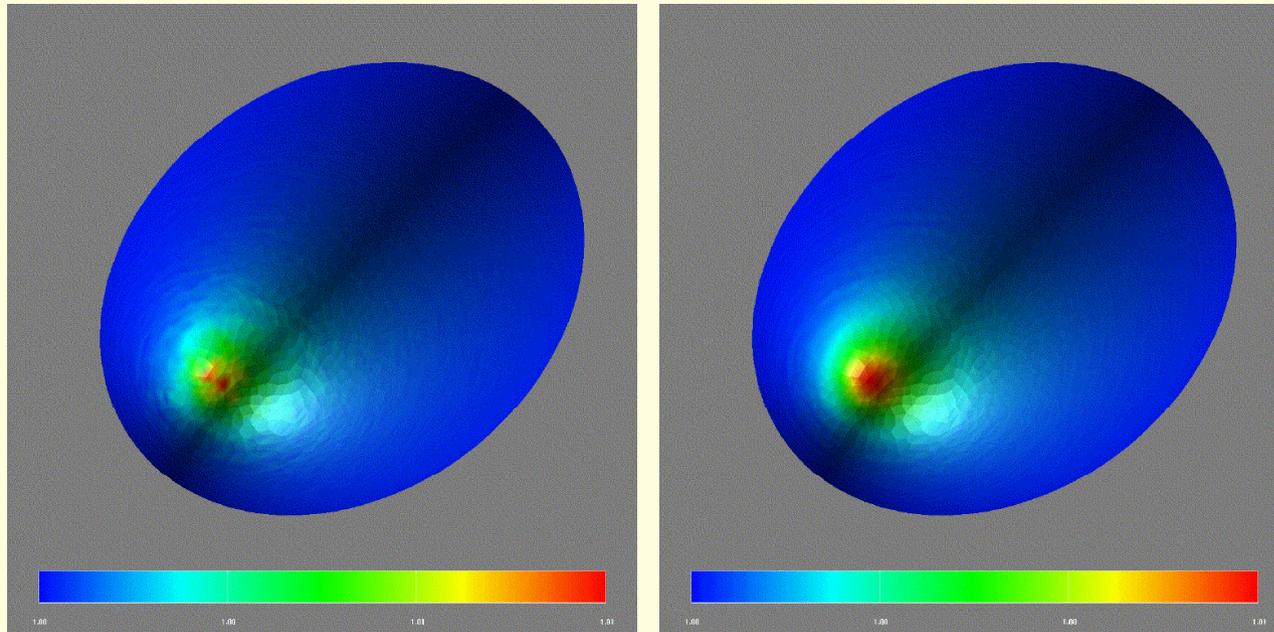


Figure 0: Pression  $\tilde{p} = p/p_\infty$ . Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

# Incidence : $5^\circ$ , coefficients aérodynamiques, maillage 3.

Schéma	$C_x$	$C_y$	$C_z$
LDA	$4.36 \times 10^{-3}$	$6.08 \times 10^{-4}$	$1.74 \times 10^{-2}$
LDA p	$1.22 \times 10^{-3}$	$1.03 \times 10^{-4}$	$5.25 \times 10^{-3}$

# Conclusions

- Réalisation d'un code 3D de type distributif,
- Peu dissipatif (cf iso-entropie)
- Préconditionnement efficace

# Perspectives

- Effets visqueux + turbulence,
- Parallélisation à faire,
- etc

# Perspectives

