Calcul des coefficients de trainée et de portance d'un dirigeable au moyen d'un schéma d'ordre deux distribualt le résidu.

M. Mezine et R. Abgrall
Mathématiques Appliquées de Bordeaux
Université Bordeaux 1, 351 Cours de la libération,
33405 Talence

1er décembre 2003

1 Introduction

Une connaissance fine des coefficients de trainée et de portance est fondamentale en vue de la contruction d'un dirigeable. En effet, ceci permet d'avoir les éléments nécessaires à une motorisation correcte de l'engin. Dans le cas de nombreux codes de simulation, cette estimation se révèle être peu précise dûe à une diffusion numérique excessive. Les solveurs utilisés, basés sur des Volumes Finis, reposent sur une approche unidimensionnelle. Par conséquent, dans le cas où le maillage de calcul n'est pas adapté à la solution, la précision de ces solveurs se dégradent très vite. Dans notre cas, l'écoulement étant tridimensionnel, il est très difficile de contruire un maillage adapté à la solution.

Depuis quelques années, nous travaillons sur une classe de schémas de discrétisation qui possèdent les caractéristiques suivantes :

– ils se révèlent précis sur des maillages de type éléments finis triangulaires,
– la molécule de calcul est compacte, facilitant l'implémentation parallèle.

Les propriétés de ces schémas sont démontrés dans [1, 6, 11, 12]. Ces schémas sont implémentés dans le code de recherche bidimensionnel FluidBox [1].

Tout d'abord, le travail a consisté à développer une version tridimensionnelle du code de calcul FluidBox pour la simulation d'écoulements compressibles non visqueux à l'aide de schémas Distributifs. Ensuite, il faut savoir que dans le cas d'un dirigeable, la vitesse de croisière est de l'ordre de 200–300 kilomètres par heure, soit un nombre de Mach de l'ordre de 0.15-0.25. Dans les phases d'approche, la vitesse donc le nombre de Mach sont plus faibles. Il a donc été nécessaire d'adapter les schémas de discrétisation afin de simuler correctement des régimes aussi faibles.

[1] développé à l'Université Bordeaux 1

2 Les schémas Distributifs

2.1 Formalisme

Les schémas Distributifs ou schémas "Fluctuation Splitting" ont été introduit par Roe au début des années 80 [13] et ont connu de nombreux développement depuis [4, 12, 16, 10, 1, 3, 2]. Dans ce paragraphe, nous rappelons la méthodologie de ces schémas dans le cas de lois de conservation scalaires.

Considérons le problème suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{ div } f(u) = 0 \text{ in } \Omega \times (0,T),\ \Omega \subset \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

ou encore sous forme quasilinéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\lambda}(u) \cdot \nabla u = 0, \tag{2.2}$$

où $\vec{\lambda(u)} = \partial f / \partial u$ est la vitesse d'advection.

Soit τ_h une triangulation du domaine Ω. Cette triangulation est formée de tétraèdres notés $\{T_j\}_{j=1,\ldots,nt}$. Les points du maillage sont $\{M_i\}_{i=1,\ldots,ns}$. Les sommets d'un tétraèdre T sont M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, M_{i_4}. Quand il n'y aura pas d'ambiguïté i_1, i_2, i_3, i_4 seront remplacés par 1, 2, 3, 4.

Comme pour une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$, la solution est approchée par une fonction continue u^h variant linéairement sur chaque tétraèdre,

$$u^h = \sum_{M_i \in \tau_h} u_i(t) \Lambda_i(x) \tag{2.3}$$

où $u_i(t)$ est la valeur de la solution au point M_i et Λ_i est la fonction de base $\mathbb{P}_1$ associé au nœud M_i :

$$\begin{cases} \Lambda_i(M_j) = \delta_{ij}, \\ \Lambda_i \in \mathbb{P}_1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Il est facile de vérifier que le gradient de la fonction de base Λ_i sur un tétraèdre T a pour expression :

$$\nabla \Lambda_i = \frac{n_i^T}{3|T|} \tag{2.5}$$

où n_i^T est la normale intérieure opposée au sommet M_i.

On définit le résidu total ou fluctuation sur un tétraèdre T par

$$\Phi^T = \int_T \text{ div } f^h \, dx = |T| \bar{\vec{\lambda}} \cdot \nabla u^h, \tag{2.6}$$

Comme ∇u^h est constant, on a une équivalence exacte entre la forme conservative et la forme quasilinéaire si la vitesse d'advection moyenne $\bar{\vec{\lambda}}$ a pour expression

$$\bar{\vec{\lambda}} = \frac{1}{|T|} \int \vec{\lambda}(u^h) \, dx.$$

On aura

$$\Phi^T = \sum_{M_i \in T} k_i u_i \tag{2.7}$$

où $k_i = \dfrac{\bar{\vec{\lambda}} \cdot \vec{n_i}^T}{3}$. Nous noterons $k_i^+ = \max(0, k_i)$ et $k_i^- = \min(0, k_i)$.
La méthode consiste à distribuer des fractions $\Phi_i^T = \beta_i^T \Phi^T$ de ce résidu aux sommets de l'élément avec la contrainte

$$\sum_{M_j \in T} \Phi_j^T = \Phi^T \tag{2.8}$$

ou encore

$$\sum_{M_i \in T} \beta_i^T = 1. \tag{2.9}$$

La quantité Φ_i^T est appelée résidu ou fluctuation envoyée au nœud M_i et calculée sur le tétraèdre T. Le schéma semi-discrétiser en espace s'écrira

$$|C_i| \frac{du_i}{dt} = \sum_{T, M_i \in T} \Phi_i^T \tag{2.10}$$

où C_i est la cellule duale associée au sommet M_i et $|C_i|$ son aire en 2D (ou volume en 3D).

2.2 Propriétés de la distribution

Les propriétés des schémas dépendent de la façon dont est distribué le résidu Φ^T. Les fractions de résidu Φ_i^T peuvent être construites de manière à satisfaire certaines propriétés désirables. Ces propriétés sont les suivantes :
$(\mathcal{U})$ Décentrement. Aucune fraction de résidu n'est distribuée aux nœuds amonts, c'est à dire

$$\Phi_i^T = 0 \text{ si } k_i < 0.$$

$(\mathcal{P})$ Positivité. Le schéma ne crée pas d'extréma locaux, ou encore si on écrit le résidu $\Phi_i^T = \sum_j c_{ij} u_j$, on impose $c_{ij} \leq 0 \; \forall j \neq i$.

$(\mathcal{LP})$ Préservation d'un état linéaire. Les coefficients de distribution β_i^T restent bornés lorsque $\Phi^T \to 0$ ce qui est équivalent à dire que le schéma est précis du second ordre sur des maillages réguliers (pour des problèmes stationnaires). Dans [1], il est prouvé que le schéma est du second ordre sur des maillages quelconques si les résidus Φ_i^T satisfont :

$$\Phi_i^T = \mathcal{O}(h^3). \tag{2.11}$$

Dans le cas d'une interpolation linéaire, il est facile de montrer que le résidu total satisfait $\Phi^T = \mathcal{O}(h^3)$. Par conséquent, imposer β_i^T bornés implique (2.11).

2.3 Quelques exemples

Différents schémas, correspondant donc à différentes façons de distribuer le résidu, ont été contruits de manière à satisfaire certaines ou toutes les propriétés énoncées précédemment (voir [12, 11] pour une revue complète).

Nous allons maintenant donner quelques exemples de schémas.

- **Schéma Narrow ou schéma N**

  $$\Phi_i^N = k_i^+ (u_i - \tilde{u}).$$

  La quantité $\tilde{u}$ est calculé de manière à assurer la conservation. Nous obtenons $\tilde{u} = N \sum_j k_j^- u_j$ avec $N = (\sum_j k_j^-)^{-1}$. Le schéma Narrow est un schéma décentré $(\mathcal{U})$, positif $(\mathcal{P})$ mais qui ne satisfait pas la propriété $(\mathcal{LP})$.

- **Schéma LDA**

$$\Phi_i^{LDA} = -k_i^+ N \Phi^T.$$

C'est un schéma décentré ($\mathcal{U}$), satisfaisant la propriété ($\mathcal{LP}$) mais qui n'est positif ($\mathcal{P}$).

- **Schéma PSI**

Les résidus sont définis en fonction des résidus du schéma Narrow :

$$\Phi_i^{PSI} = \beta_i^{PSI} \Phi^T$$

avec $\beta_i^{PSI} = \max(0, \beta_i^N) / \sum_j \max(0, \beta_j^N)$. Ce schéma combine les propriétés ($\mathcal{U}$), ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{LP}$).

3 Schémas systèmes pour les équations d'Euler

Les équations d'Euler expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un fluide compressible non visqueux. Sous forme conservative, le système s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{ div } \mathcal{F}(U) = 0, \tag{3.1}$$

où U est le vecteur des variables conservées et $\mathcal{F} = (F, G, H)$ sont les flux non visqueux. Sous forme non conservative le système devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} + C\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \tag{3.2}$$

où $A = \dfrac{\partial F}{\partial U}$, $B = \dfrac{\partial G}{\partial U}$, $A = \dfrac{\partial F}{\partial U}$.

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+p) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E+p) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(E+p) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

La variable ρ représente la densité, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ la vitesse et $E = \rho\epsilon + \dfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2$ est l'énergie totale volumique, ϵ désignant l'énergie interne par unité de masse. La pression p est définie par la loi d'état des gaz parfaits

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right). \tag{3.4}$$

On supposera que le rapport des chaleurs spécifiques γ est constant et égal à $\dfrac{7}{5}$. On notera H l'enthalpie totale spécifique :

$$H = \frac{E + P}{\rho}. \tag{3.5}$$

Le nombre de Mach est $M = ||\mathbf{u}||/c = q/c$, où c est la vitesse du son définie par

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}. \tag{3.6}$$

L'extension du schéma semi-discrétisé (2.10) est

$$|C_i|\frac{dU_i}{dt} = \sum_{T, M_i \in T} \Phi_i^T = \sum_{T, M_i \in T} \beta_i^T \Phi^T$$

où les quantités U_i et Φ^T sont des vecteurs à cinq composantes et β_i^T sont des matrices de distribution.

3.1 La linéarisation de Roe-Struijs-Deconinck

Afin d'étendre les schémas définis dans la section précédente, une linéarisation conservative est nécessaire [16]. Cette linéarisation consiste à trouver un état moyen $\bar{U}$ tel que

$$\Phi^T = \int_T \text{div } \mathcal{F}^h \, dx = |T| \left(A(\bar{U})\frac{\partial U^h}{\partial x} + B(\bar{U})\frac{\partial U^h}{\partial y} + C(\bar{U})\frac{\partial U^h}{\partial z} \right).$$

Une telle linéarisation est obtenue à l'aide d' une extension multidimensionnelle de la linéarisation de Roe appelé linéarisation de Roe-Struijs-Deconinck [5]. Comme dans le cas scalaire, le résidu sera donné par

$$\Phi^T = \sum_{M_i \in T} K_i U_i \tag{3.7}$$

où les matrices K_i sont définies par

$$K_i = \frac{1}{3}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) \cdot \vec{n_i}^T$$

où $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ sont les matrices jacobiennes A, B et C evaluées à un état moyen $\bar{U}$. Le système des équations d'Euler étant hyperbolique, les matrices K_i s'écrivent sous la forme

$$K_i = R_i \Lambda_i L_i$$

où R_i est la matrice des vecteurs propres, $L_i = R_i^{-1}$ et Λ_i est la matrice diagonale des valeurs propres. On introduit les matrices K_i^+ et K_i^- définies par

$$K_i^+ = R_i \Lambda_i^+ L_i \text{ et } K_i^- = R_i \Lambda_i^- L_i$$

où Λ_i^+ et Λ_i^- contiennent respectivement les valeurs propres positives et négatives de K_i.

3.2 Exemples de schémas système

Les schémas présentés dans cette section sont des extensions naturelles des schémas scalaires présentés précédemment.

- **Schéma Narrow**

  $$\Phi_i^N = K_i^+(U_i - \tilde{U})$$

  où la quantité $\tilde{U}$ est calculée de manière à assurer la conservation. On obtient

  $$\tilde{U} = N \sum_j K_j^- U_j$$

  avec $N = (\sum_j K_j^-)^{-1}$. Il est prouvé dans [1] que le schéma N système est toujours bien défini.

- **Schéma LDA**
  Le schéma LDA système est défini par

$$\Phi_i^{LDA} = -K_i^+ N \Phi^T.$$

  Comme pour le schéma N, le schéma LDA système est toujours bien défini.
- **Schéma PSI**
  L'extension du schéma non linéaire PSI scalaire aux systèmes est très difficile et constitue un sujet de recherche actif. Des extensions sont proposées dans [16, 15, 1, 11].

4 Applications

4.1 Discrétisation en temps

Les solutions recherchées étant des solutions stationnaires, nous utilisons le schéma d'intégration en temps suivant :

$$\frac{1}{\Delta t}(U^{n+1} - U^n) = R^{n+1}$$

où le vecteur $R = (R_1, \ldots, R_{ns})$ est défini par $R_i = \sum_{T, M_i \in T} \Phi_i^T$.
En utilisant un développement de Taylor de la quantité R^{n+1}, il vient que

$$\left(\frac{1}{\Delta t} I + \left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]^n\right)(U^{n+1} - U^n) = -R^n.$$

Le système obtenu est alors résolu à l'aide d'un algorithme GMRES préconditionné ILU(0). La matrice jacobienne $\frac{\partial R}{\partial U}$ est évaluée de manière analytique comme dans [9, 15, 11].

4.2 Conditions aux limites

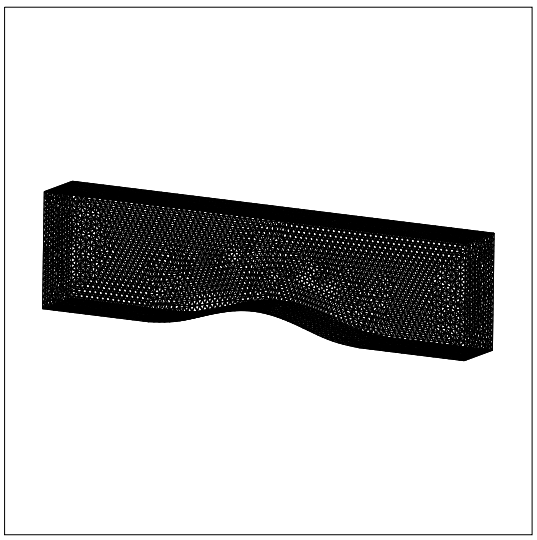
Dans les simulations nous considérons deux types de conditions aux limites : les conditions de type paroi et les conditions d'entrée/sortie. Ces dernières sont imposées faiblement à l'aide de la technique de mailles fictives développée par Paillère [12]. L'avantage de cette méthode est que les nœuds frontières sont traités comme des nœuds intérieurs.

Pour chaque facette frontière (i, j, k), nous contruisons trois tétraèdres fictifs (i, j, k, i^*), (i, j, k, j^*) et (i, j, k, k^*) dans lesquels les nœuds i^*, j^* et k^* vont tendre vers les nœuds i, j et k. À la limite, par exemple pour le tétraèdre (i, j, k, i^*), les normales $\vec{n}_j$ et $\vec{n}_k$ vont tendre vers 0. Dans ce cas, aucune fraction du résidu calculé sur ce tétraèdre ne va être distribué aux nœuds j et k. L'état imposé au nœud fictif va être être déterminé par le type de condition aux limites considéré (voir [11] pour plus de détails).

4.3 Écoulement dans un canal

Le domaine de calcul est le pavé $[0, 4] \times [0, 1] \times [0, 0.5]$. Ce pavé présente un bord incurvé dont les coordonnées sont données par

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0.1 \times (1 - cos[(x-1)\pi]) & \text{si } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Ce cas d'épreuve concerne un écoulement subsonique avec un nombre de Mach à l'infini égal à 0.5. Sur les bords $z = 0$, $z = 0.5$ et sur les bords inférieur et supérieur, des conditions de réflection sont appliquées. Sur les bords $x = 0$ et $x = 1$, on impose respectivement des conditions d'entrée et de sortie subsonique. Un maillage non structuré de 17493 sommets et 87349 tétraèdres a été utilisé. Les résultats obtenus avec les schémas Narrow et LDA sont présentés sur la figure 4.3.

5 Préconditionnement à faible nombre de Mach

Le calcul d'écoulements à faible nombre de Mach à l'aide de schémas distributifs ou alors à l'aide de schémas volumes finis présente un certain nombre de difficultés. En effet, pour ce type d'écoulements, la vitesse de convergence et la précision peuvent se dégrader de manière significative. La convergence des schémas explicites ou implicites vers la solution stationnaire peut être fortement ralentie. De plus, pour des schémas implicites, le conditionnement des matrices se détériore. Les problèmes proviennent de la grande disparité entre les vitesses des ondes matérielles et les vitesses des ondes acoustiques. Les préconditionnements locaux [14, 17, 7, 8] ont été introduits de manière à réduire ces disparités tout en respectant l'état stationnaire, voir en l'améliorant.

5.1 Préconditionnement de Henriques et Gato

Le système des équations d'Euler (3.2) peut être symmétrisé en effectuant le changement de repères (x, y, z) à (ξ, η, τ). Ce repère est défini par toute base orthonormée (e_0, e_1, e_2) telle que $e_0 = \mathbf{u}/q$. Le système (3.2) devient alors

$$\frac{\partial \breve{Q}}{\partial t} + \breve{A} + \frac{\partial \breve{Q}}{\partial \xi} + \breve{B}\frac{\partial \breve{Q}}{\partial \eta} + \breve{C}\frac{\partial \breve{Q}}{\partial \tau} = 0, \tag{5.1}$$

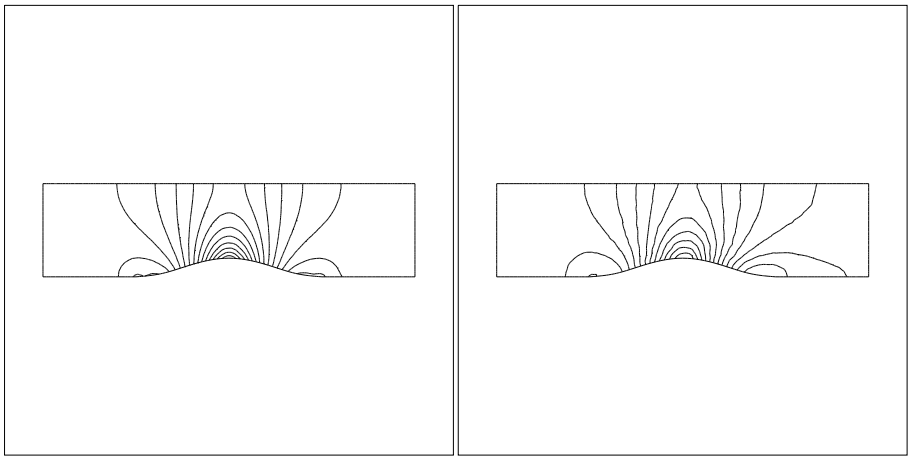


FIG. 1 – Écoulement dans un canal, coupe en $z = 0.25$. Nombre de Mach (15 contours). Gauche : schéma LDA, $0.4274 \leq M \leq 0.9492$. Droite : schéma N, $0.4093 \leq M \leq 0.8805$.

avec

$$\partial\breve{Q} = \frac{\partial\breve{Q}}{\partial V}\partial V = \begin{pmatrix} \partial p/\rho \\ c\partial\breve{u} \\ c\partial\breve{v} \\ c\partial\breve{w} \\ (\partial p - c^2\partial\rho)/\rho \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

où $V = (\rho, u, v, w, p)$ est le vecteur des variables primitives. Les jacobiennes $\breve{A}$, $\breve{B}$, $\breve{C}$ et $\frac{\partial\breve{Q}}{\partial V}$ ont pour expression

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} q & c & 0 & 0 & 0 \\ c & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \ \breve{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \breve{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\breve{Q}}{\partial V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1/\rho \\ 0 & ce_{0_x} & ce_{0_y} & ce_{0_z} & 0 \\ 0 & ce_{1_x} & ce_{1_y} & ce_{1_z} & 0 \\ c & ce_{2_x} & ce_{2_y} & ce_{2_z} & 0 \\ -c^2/\rho & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

En multipliant l'équation (5.1) par la matrice de préconditionnement

$$\breve{P} = \begin{pmatrix} M^2 & -M & 0 & 0 & 0 \\ -M & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

et en appliquant le changement de variables suivant

$$\partial W = \breve{L}\partial\breve{Q} = \begin{pmatrix} \breve{u}\partial\breve{v} \\ -\partial p/\rho \\ \breve{u}\partial\breve{w} \\ (\gamma-1)T\partial s \\ \partial H - T\partial s \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

avec la matrice $\breve{L}$ donnée par

$$\breve{L} = \breve{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & M & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

nous obtenons la forme symétrique

$$\hat{T}\frac{\partial W}{\partial t} + \hat{A}\frac{\partial W}{\partial \xi} + \hat{C}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \hat{C}\frac{\partial W}{\partial \tau} = 0, \tag{5.8}$$

avec

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$$\hat{T} = \breve{L}\breve{P}\breve{R} = \frac{1}{q}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Nous remarquons que la matrice $\hat{T}$ est une matrice symétrique définie positive. Le système des équations d'Euler préconditionnées a donc pour expression

$$\frac{\partial U}{\partial t} + R\left(\hat{A}\frac{\partial W}{\partial \xi} + \hat{C}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \hat{C}\frac{\partial W}{\partial \tau}\right) = 0, \tag{5.11}$$

où la matrice R est donnée par

$$R = \frac{\partial U}{\partial W}\hat{T}^{-1} = \frac{\partial U}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial \breve{Q}}\frac{\partial \breve{Q}}{\partial W}\hat{T}^{-1}. \tag{5.12}$$

Les vitesses d'ondes de ce système sont données par les valeurs propres de la matrice $\hat{A}n_\xi + \hat{C}n_\eta + \hat{C}n_\tau$ où n_ξ, n_η et n_τ sont les coordonéees de la normales $\vec{n}$ dans le repère (e_0, e_1, e_2). Ces valeurs propres ont pour

expression

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 &= n_\xi, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} n_\xi M^2 + \frac{1}{2}\sqrt{n_\xi^2 M^2 (M^2-4) + 4||\vec{n}||^2}, \\ \lambda_5 &= \frac{1}{2} n_\xi M^2 - \frac{1}{2}\sqrt{n_\xi^2 M^2 (M^2-4) + 4||\vec{n}||^2}. \end{cases} \tag{5.13}$$

5.2 Le schéma LDA préconditionné

Pour les équations d'Euler non préconditionnées, le résidu du schéma LDA a pour expression

$$\Phi_i^{LDA} = K_i^+ N$$

où $N = (\sum_i K_i^+)^{-1}$ et K_i^+ est la partie positive de la matrice $K_i = \frac{1}{3}(An_x + Bn_y + Cn_y)$ évaluée en un état moyen $\bar{U}$.

Dans le cas du système préconditionné, le schéma LDA va être basé sur les variables ∂W. Par conséquent, les matrices K_i vont être remplacées par les matrices $\hat{K}_i$ avec

$$\hat{K}_i = \frac{1}{3}(\hat{A}n_\xi + \hat{B}n_\eta + \hat{C}n_\tau). \tag{5.14}$$

Les matrices de distribution du schéma LDA préconditionné sont donc définies par

$$\hat{B}_i^{LDAP} = \hat{K}_i^+ \hat{N}, \tag{5.15}$$

où $\hat{N} = (\sum_j \hat{K}_j^+)$. Enfin, en retournant dans les variables conservatives ∂U, nous obtenons

$$B_i^{LDAP} = R\hat{B}_i^{LDAP} R^{-1} \tag{5.16}$$

et le résidu au nœud i a pour expression

$$\Phi_i^{LDAP} = B_i^{LDAP} \Phi^T. \tag{5.17}$$

Le résidu total Φ^T est calculé à l'aide de (3.7). Toutes les matrices sont évalués à un état moyen $\bar{U}$ calculé sur chaque tétraèdre T.

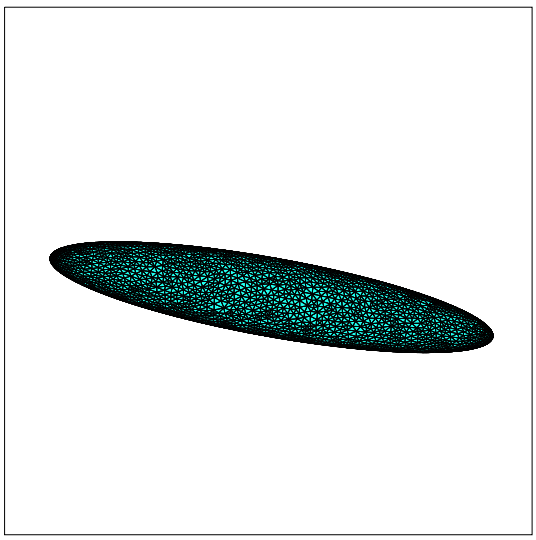


FIG. 2 – Dirigeable approché par une ellipsoïde allongé

6 Dirigeable

6.1 Géométrie

Le dirigeable est approximée par un ellipsoïde allongé d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

où $a = 1.37/2$ et $b = 1.37/12$ (voir figure 2).

Le domaine de calcul est délimité par le pavé $(x, y, z) \in [-2.4, 4.8] \times [-2.4, 2.4] \times [-2.4, 2.4]$ et la surface de cette ellipsoïde.

6.2 Résultats Numériques

Trois maillages non structurés composés de tétraèdres ont été utilisés :

- Maillage 1 : 33 869 sommets et 188 909 tétraèdres.
- Maillage 2 : 106 437 sommets et 596 560 tétraèdres.
- Maillage 3 : 140 265 sommets et 796 509 tétraèdres.

L'état infini amont est donné par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_\infty & = & 1.225\ kg.m^{-3}, \\ ||\vec{u}_\infty|| & = & 34.0252\ m.s^{-1}, \\ p_\infty & = & 101396\ Pa. \end{array} \right.$$

Nous noterons α et θ les angles entre la vitesse $\vec{u}$ et les axes de coordonnées comme montrés sur la figure 3. On

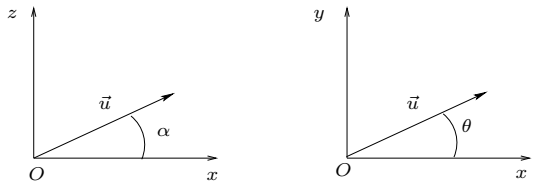


FIG. 3 – Définition des angles α et θ

introduit la force de portance $\vec{F}$ définie par

$$\vec{F} = \int_\Gamma p\,\vec{n}\,d\Gamma = (F_x, F_y, F_z),$$

où p est la pression, Γ est le bord du dirigeable et $\vec{n}$ est la normale au bord rentrante dans le domaine. Les coefficients aérodynamiques c_x, c_y, c_z sont définis par

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_m} \\ c_y &= \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_m} \\ c_z &= \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_m} \end{aligned}$$

où S_m est la surface du maître–couple : $S_m = \pi R^2$ avec $R = 1.37/12$.

6.2.1 Incidence nulle, $\alpha = 0°$ et $\theta = 0°$

Cette section présente les résultats numériques obtenus à l'aide des schémas LDA et LDA préconditionné lorsque l'incidence de l'ellipsoïde est nulle. Comme pour le cas d'épreuve de l'écoulement dans un canal, un schéma implicite est utilisé pour l'intégration en temps. Les courbes de convergence pour les trois maillages sont représentées sur les figures 14, 15 et 16. Le résidu désigne la quantité $U^{n+1} - U^n$ évaluée en norme L^2. La convergence est obtenue lorsque ce résidu a gagné six ordres de grandeur.

Des conditions aux limites de type réflection sont appliquées sur le bord de l'ellipsoïde. Les figures 4-5-6 et 8-9-10 représentent respectivement les lignes de Mach sur le plan $z = 0$ et sur le plan $y = 0$. Les meilleurs résultats sont obtenus par le schéma préconditionné. En effet, nous pouvons voir sur les différentes figures que le schéma LDA génére une couche d'entropie au bord de l'ellipsoïde surtout au niveau du nez entrant. Cette couche altère la qualité des lignes de Mach. En effectuant un zoom de la figure 5 comme montré sur 7, nous pouvons voir clairement des lignes de Mach altérées pour le schéma LDA et le bénéfice obtenu avec l'approche du préconditionnement. Ceci est confirmé avec les figures 11, 12 qui montrent la production d'entropie $S = \log(p/\rho^\gamma)$ des deux schémas (il faut savoir que pour un écoulement subsonique, comme dans le cas présent, l'entropie doit rester constante). Le schéma LDA est donc le plus dissipatif.

Pour mieux se rendre compte de la qualité des résultats obtenus avec le schéma préconditionné, nous avons choisi de représenter une vue en trois dimensions de l'avant et de l'arrière de l'ellipsoïde, là ou se situe les régions importantes de l'écoulement. Les figures 17 à 24 représentent les distributions du nombre de Mach et de pression sur le bord de l'objet, calculées sur les maillages 1 et 3. La zone sombre présente sur chaque dessin n'est pas un artéfact numérique mais tout simplement une zone d'ombre crée par le logiciel de visualisation. Sur les figures 17 et 19, nous pouvons voir que la solution obtenue avec le schéma LDA préconditionné est plus symétrique que celle obtenue avec le schéma LDA. Cette observation est importante. En effet, la solution doit être symétrique car l'écoulement s'effectue à incidence nulle. Au vue des différentes figures de l'avant et de l'arrière de l'ellipsoïde, nous voyons clairement le caractère moins dissipatif du schéma LDA préconditionné. Pour ce dernier, les distributions de pression et du nombre de Mach s'effectuent de manière moins diffusif.

Pour conclure cette section, les tableaux 1, 2 regroupent les résultats pour les trois maillages en donnant les valeurs des coefficients aérodynamiques c_x, c_y et c_z ainsi que les valeurs minimales et maximales du nombre de Mach.

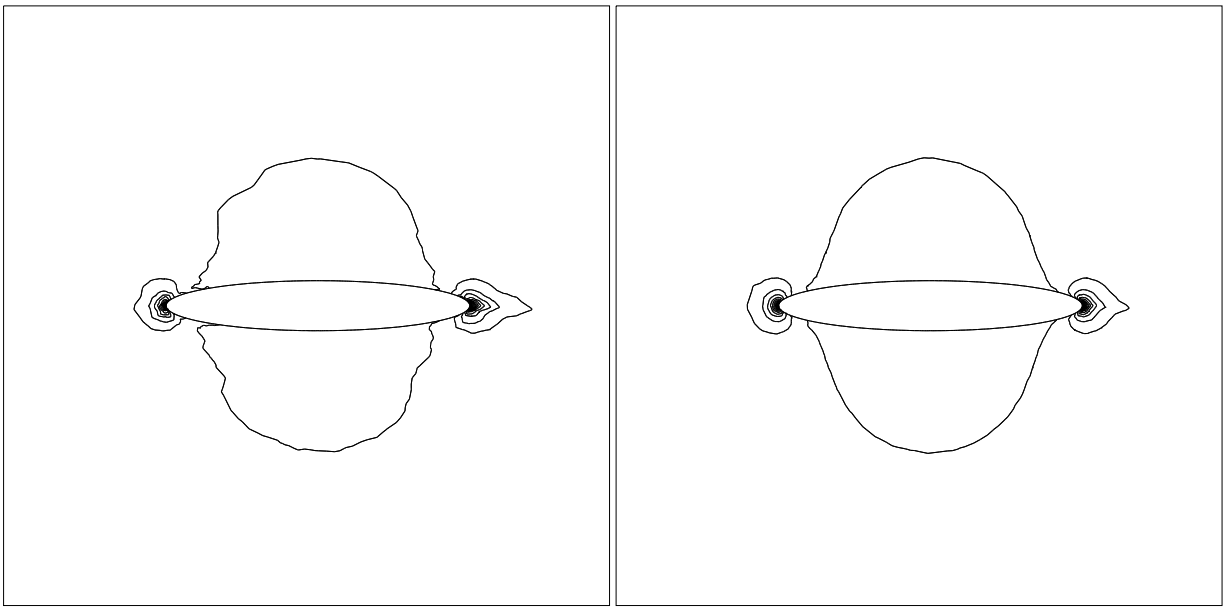


FIG. 4 – Maillage 1, coupe en $z = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.010582 à 0.10532). Gauche : schéma LDA, $0.01858 \leq M \leq 0.10391$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01152 \leq M \leq 0.10439$.

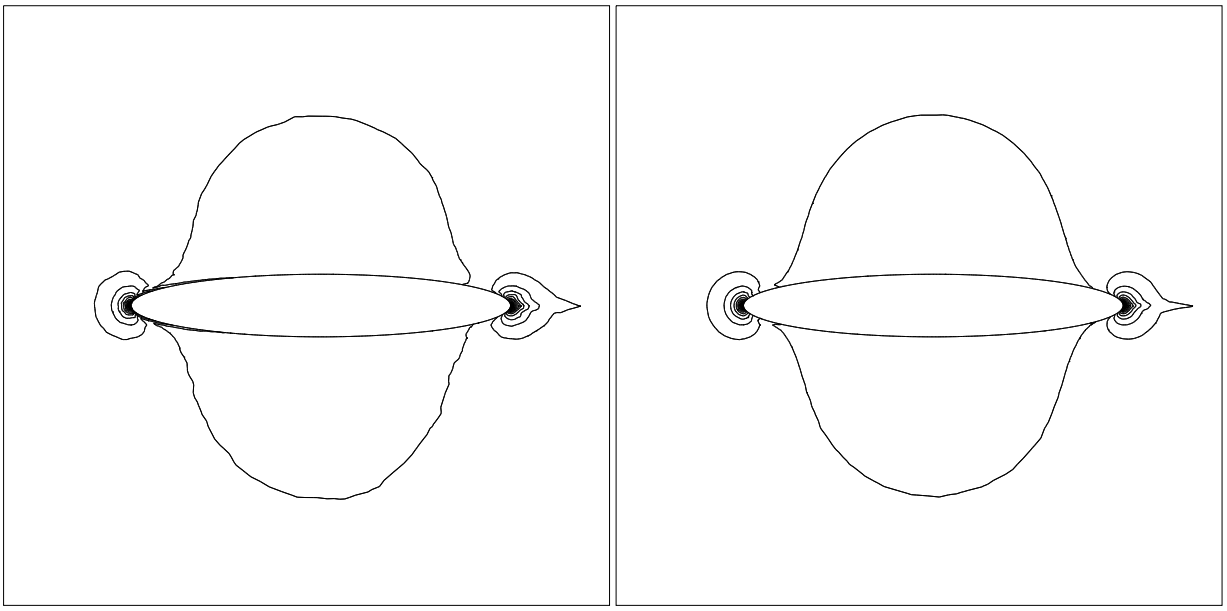


FIG. 5 – Maillage 2, coupe en $z = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.00833 à 0.10530). Gauche : schéma LDA, $0.00928 \leq M \leq 0.10429$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01277 \leq M \leq 0.10448$.

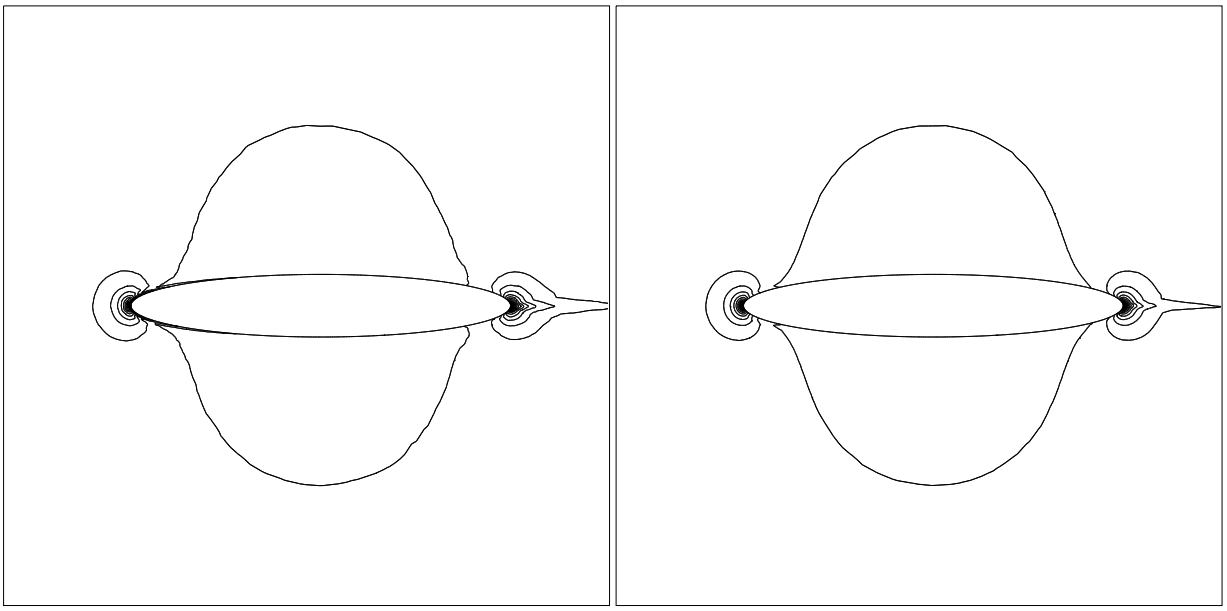


FIG. 6 – Maillage 3, coupe en $z = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.00999 à 0.10538). Gauche : schéma LDA, $0.01180 \leq M \leq 0.10429$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01093 \leq M \leq 0.10444$.

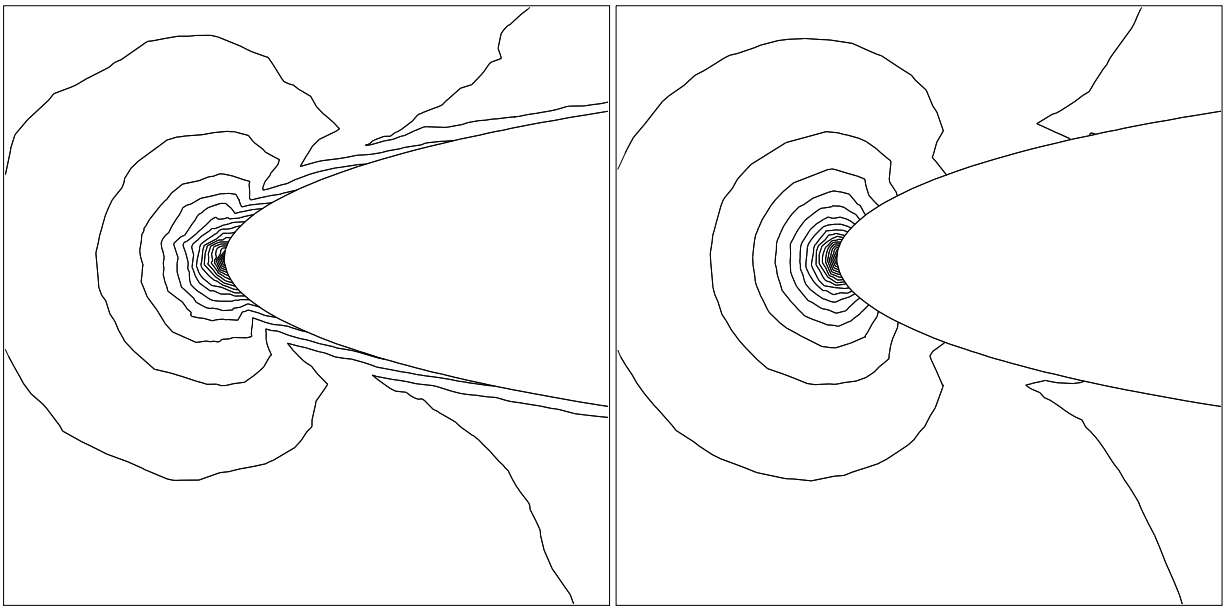


FIG. 7 – Nombre de Mach, zoom sur le plan $z = 0$. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

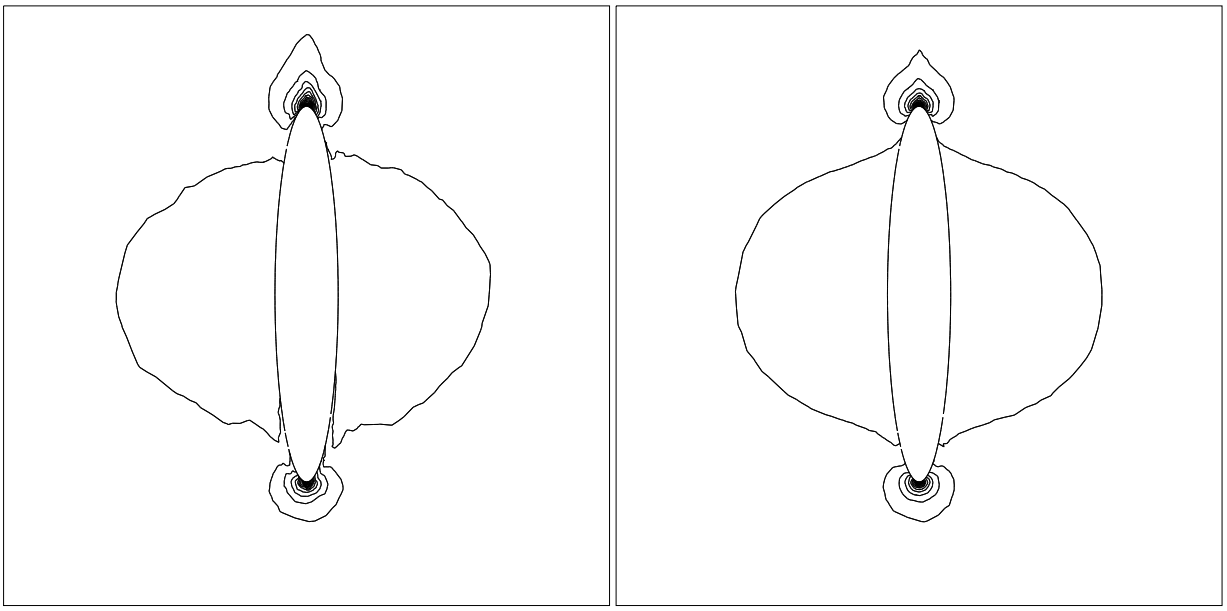


FIG. 8 – Maillage 1, coupe en $y = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.01089 à 0.10532). Gauche : schéma LDA, $0.01243 \leq M \leq 0.10369$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01181 \leq M \leq 0.10439$.

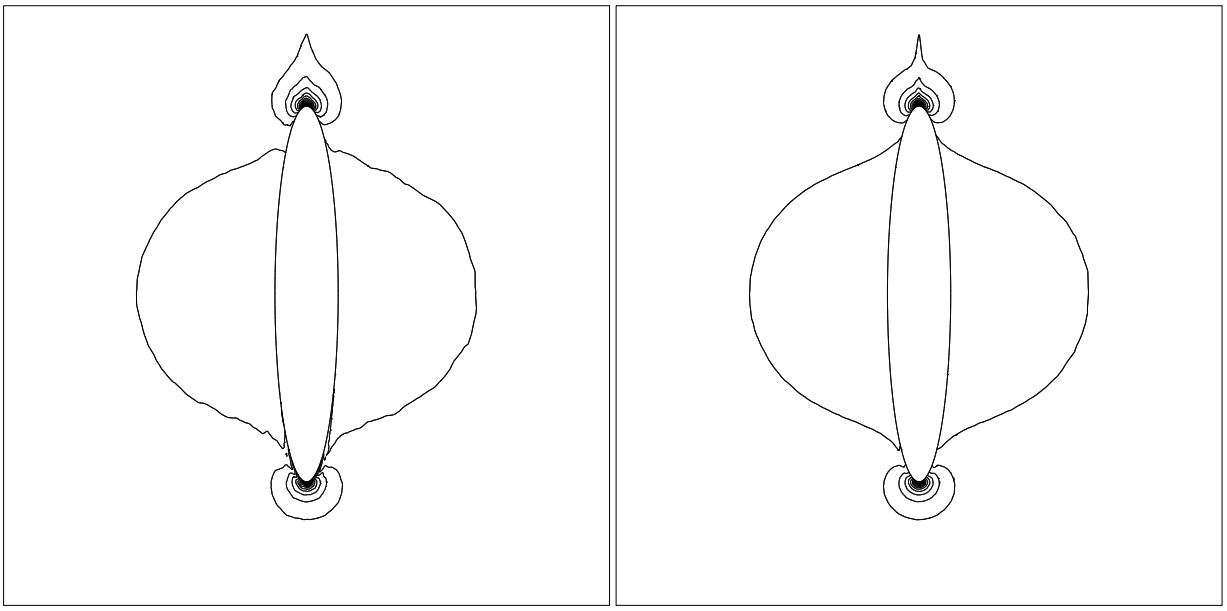


FIG. 9 – Maillage 2, coupe en $y = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.01026 à 0.10454). Gauche : schéma LDA, $0.01119 \leq M \leq 0.10424$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01334 \leq M \leq 0.10454$.

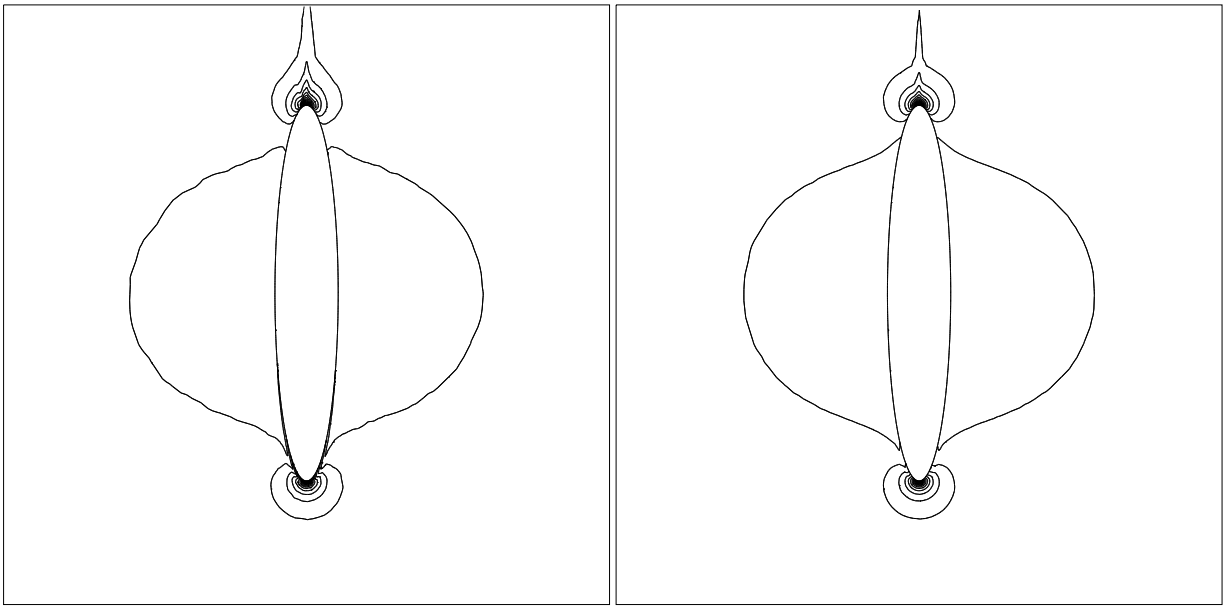


FIG. 10 – Maillage 3, coupe en $y = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.01109à 0.10536). Gauche : schéma LDA, $0.01352 \leq M \leq 0.10435$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01203 \leq M \leq 0.10444$.

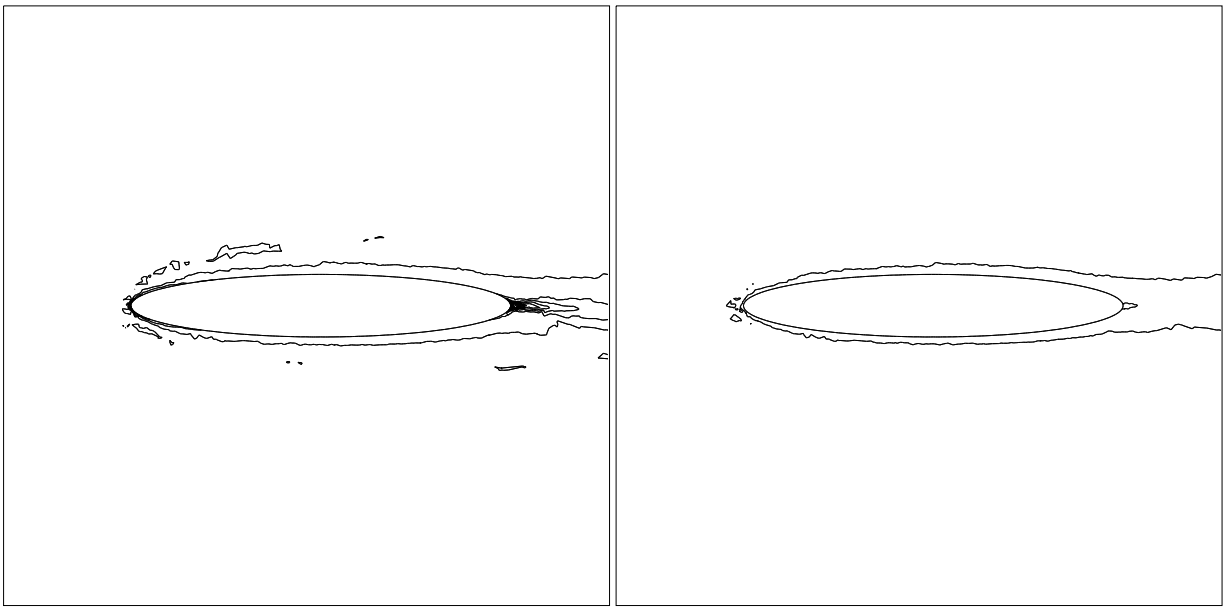


FIG. 11 – Maillage 1, coupe en $z = 0$. Entropie (20 contours de -0.47126 à -0.46725). Gauche : schéma LDA, $-0.471221 \leq S \leq -0.467294$. Droite : schéma LDA préconditionné, $-0.471092 \leq S \leq -0.4707$.

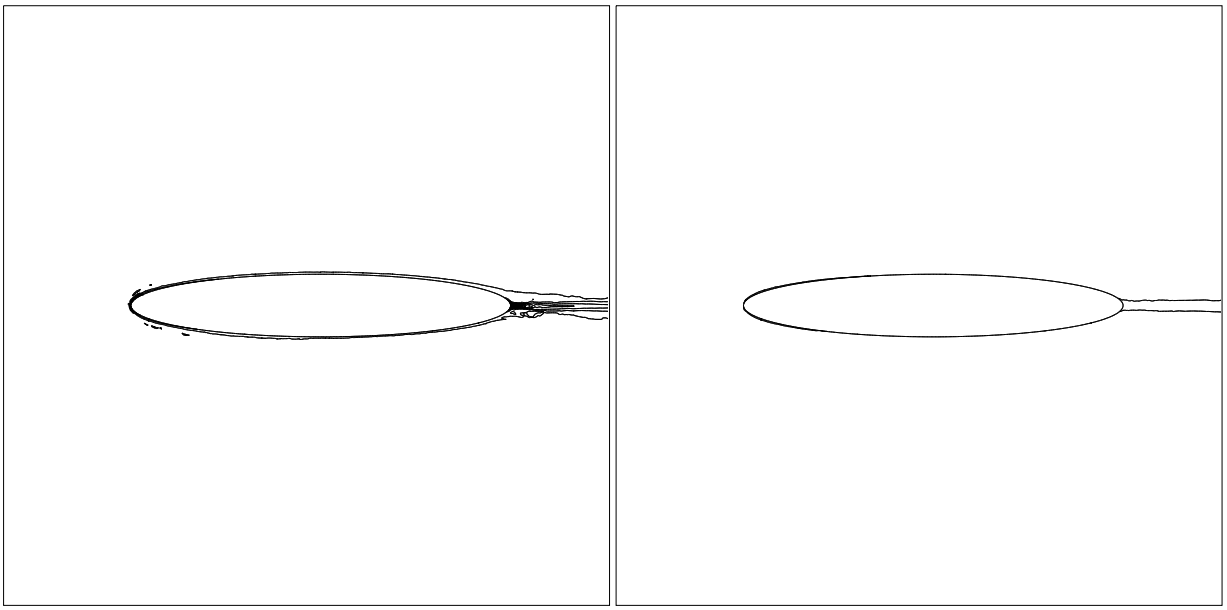


FIG. 12 – Maillage 2, coupe en $z = 0$. Entropie (20 contours de -0.47157 à -0.46599). Gauche : schéma LDA, $-0.471515 \leq S \leq -0.466042$. Droite : schéma LDA préconditionné, $-0.471119 \leq S \leq -0.470752$.

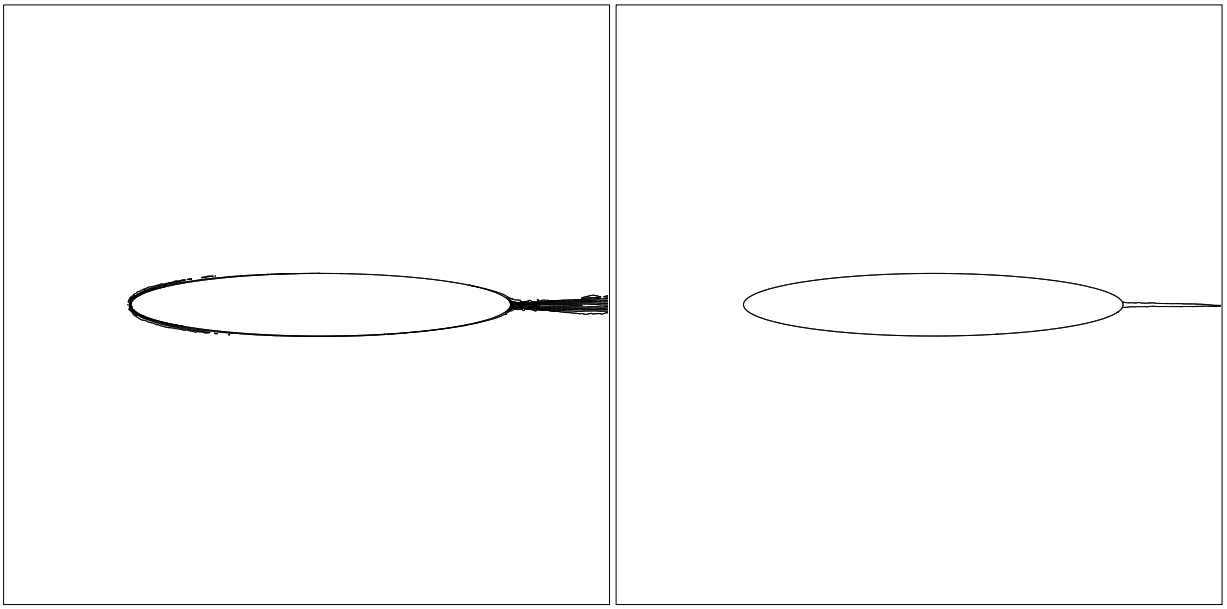


FIG. 13 – Maillage 3, coupe en $z = 0$. Entropie (20 contours de -0.47165 à -0.46659). Gauche : schéma LDA, $-0.471600 \leq S \leq -0.466647$. Droite : schéma LDA préconditionné, $-0.471118 \leq S \leq -0.470753$.

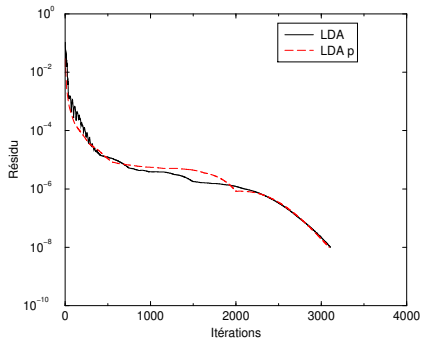


FIG. 14 – Courbes de convergence pour le maillage 1

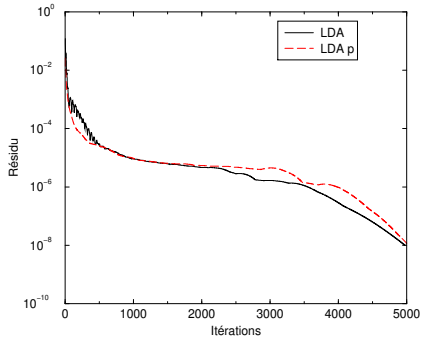


FIG. 15 – Courbes de convergence pour le maillage 2

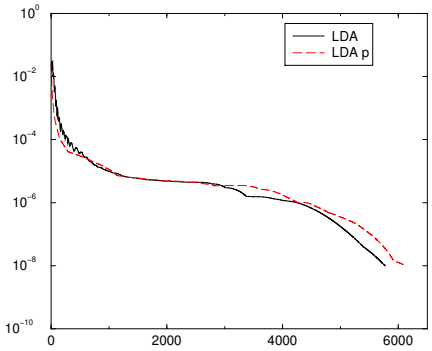


FIG. 16 – Courbes de convergence pour le maillage 3

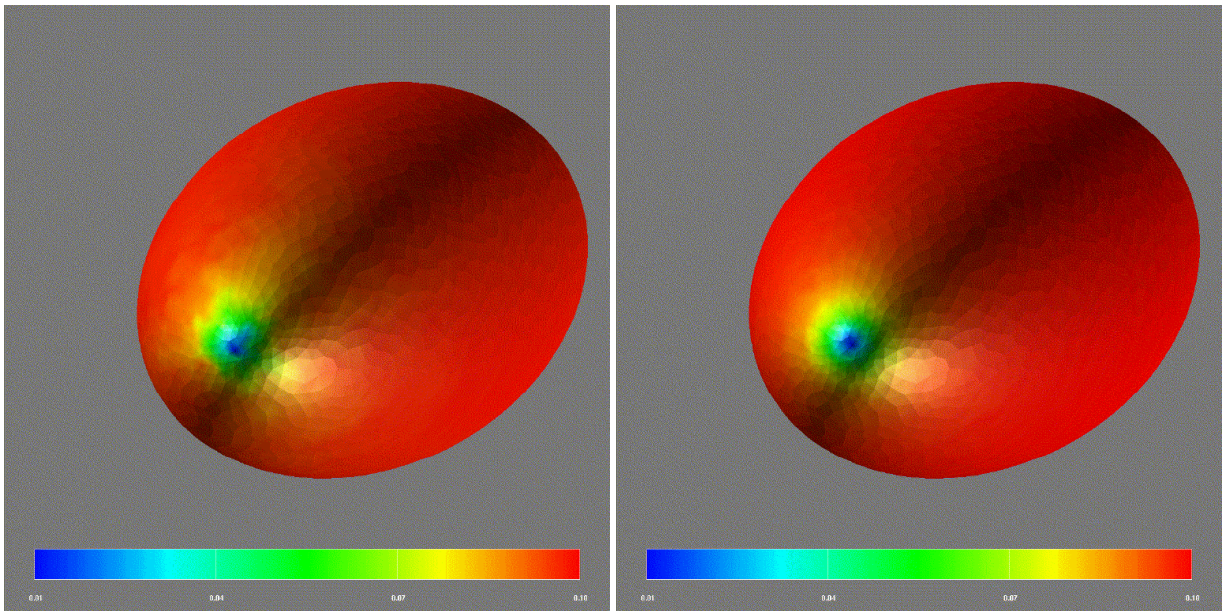


FIG. 17 – Nombre de Mach, vue avant sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

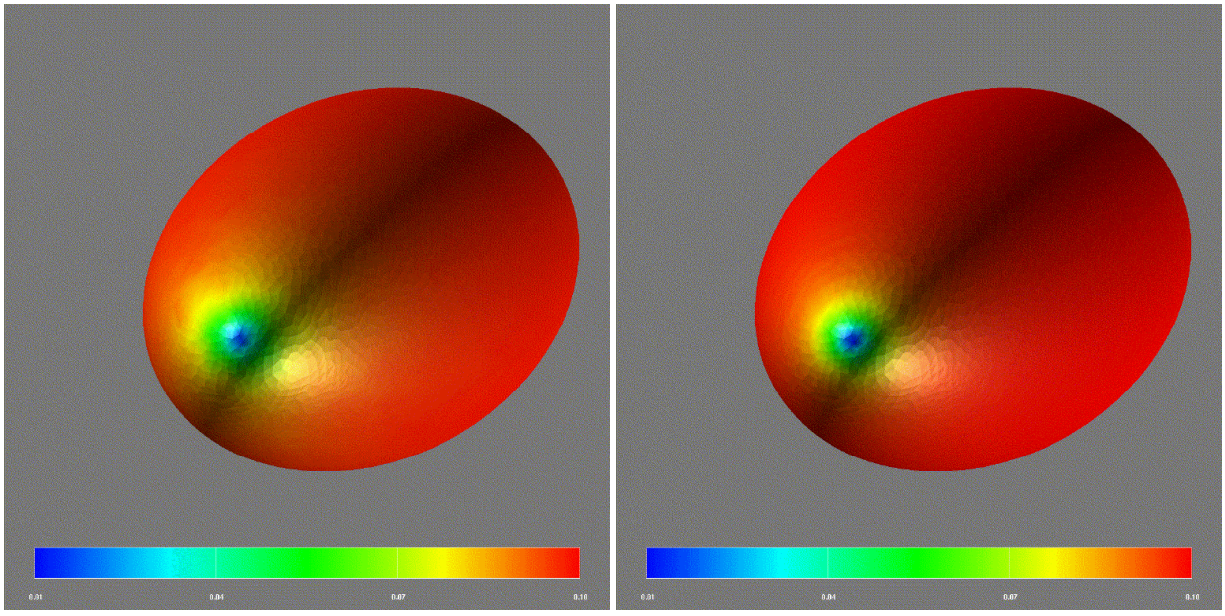


FIG. 18 – Nombre de Mach, vue avant sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

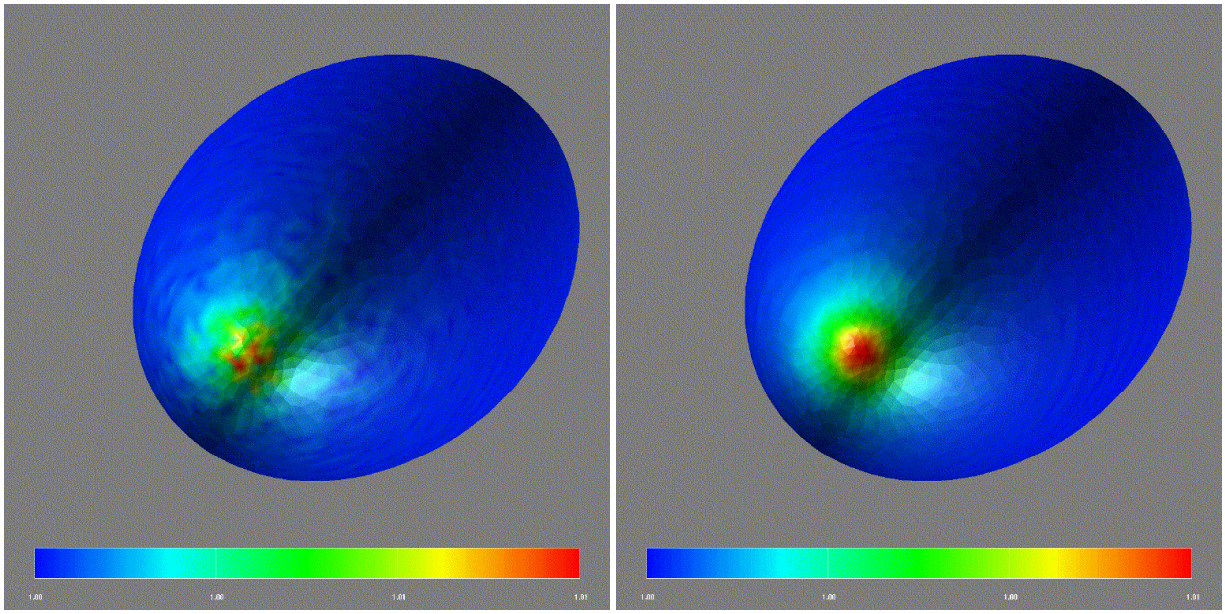


FIG. 19 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue avant sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

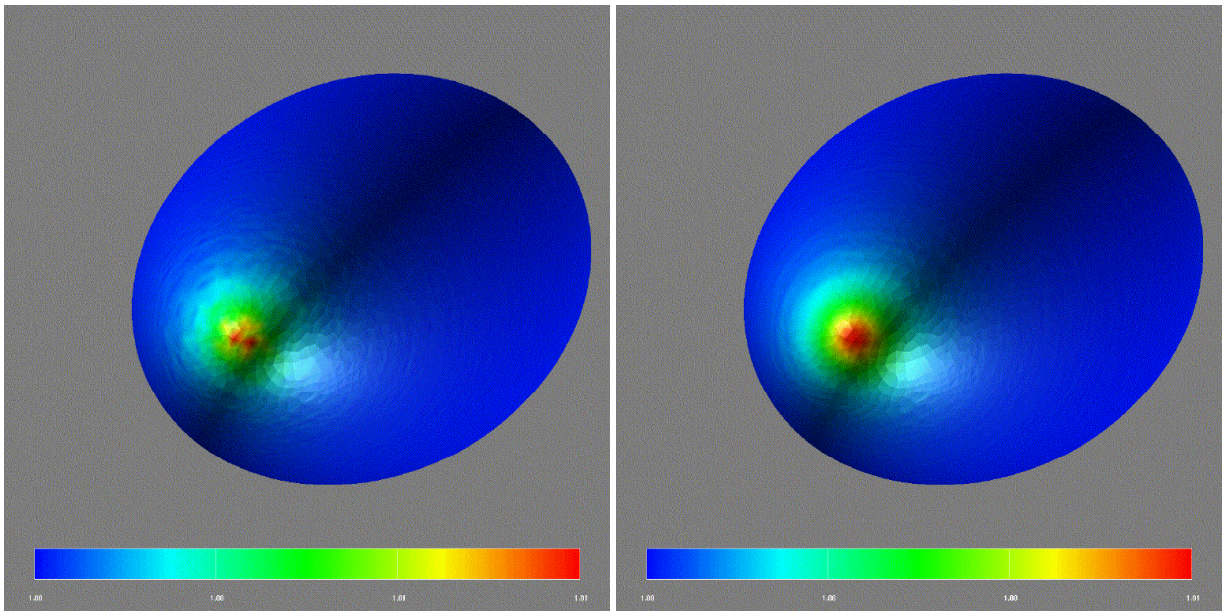


FIG. 20 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue avant sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

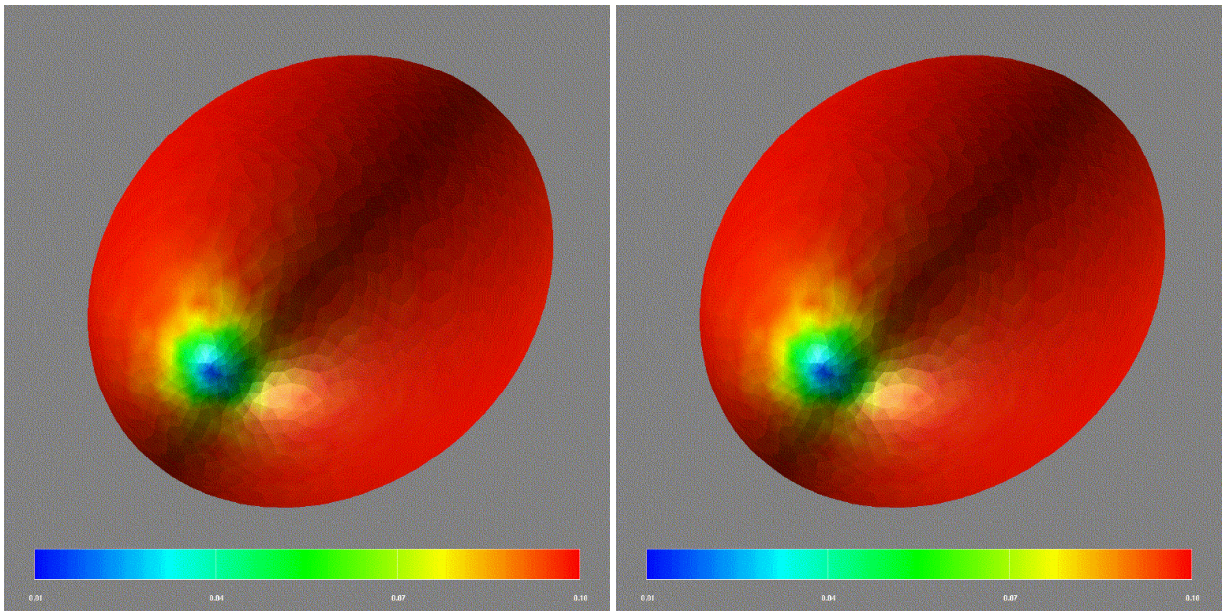


FIG. 21 – Nombre de Mach, vue arrière sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

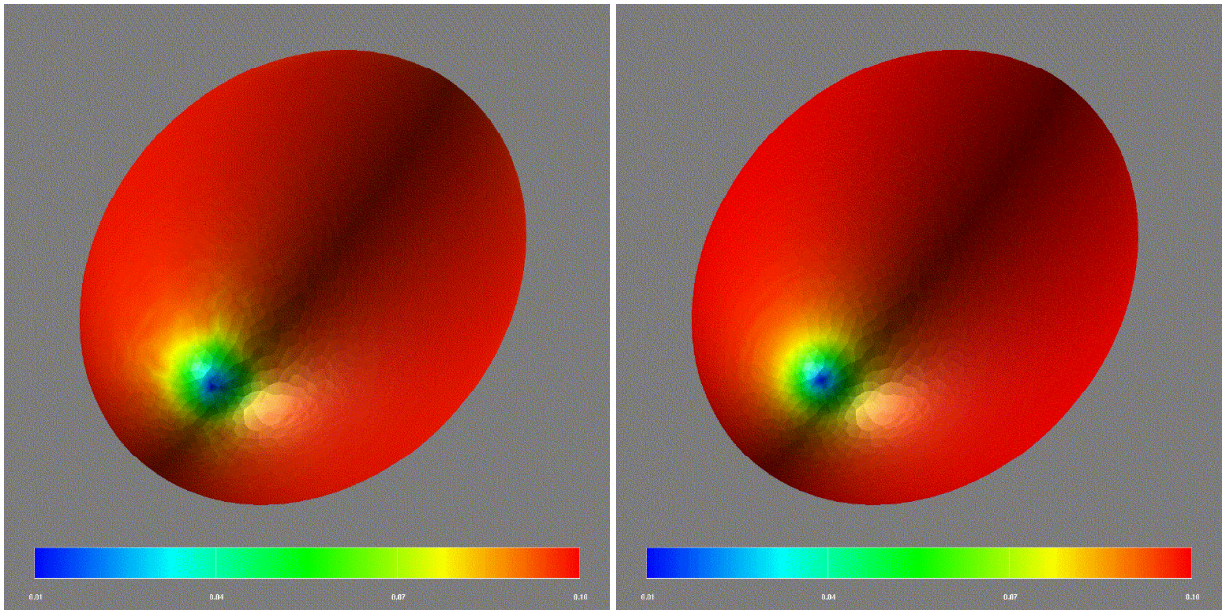


FIG. 22 – Nombre de Mach, vue arrière sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

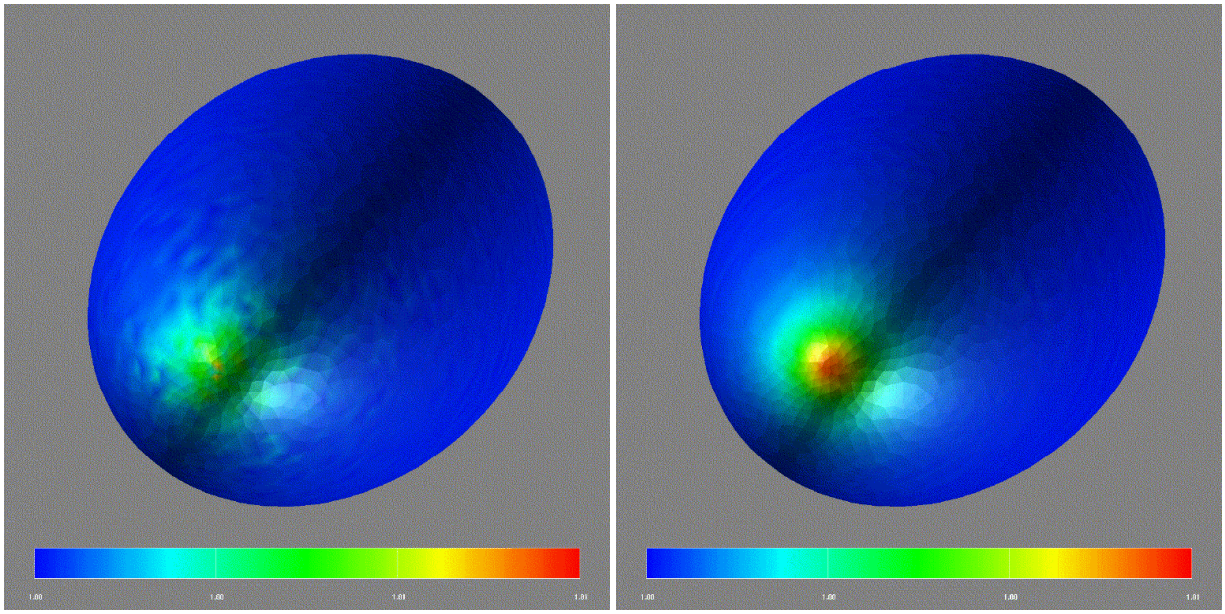


FIG. 23 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue arrière sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

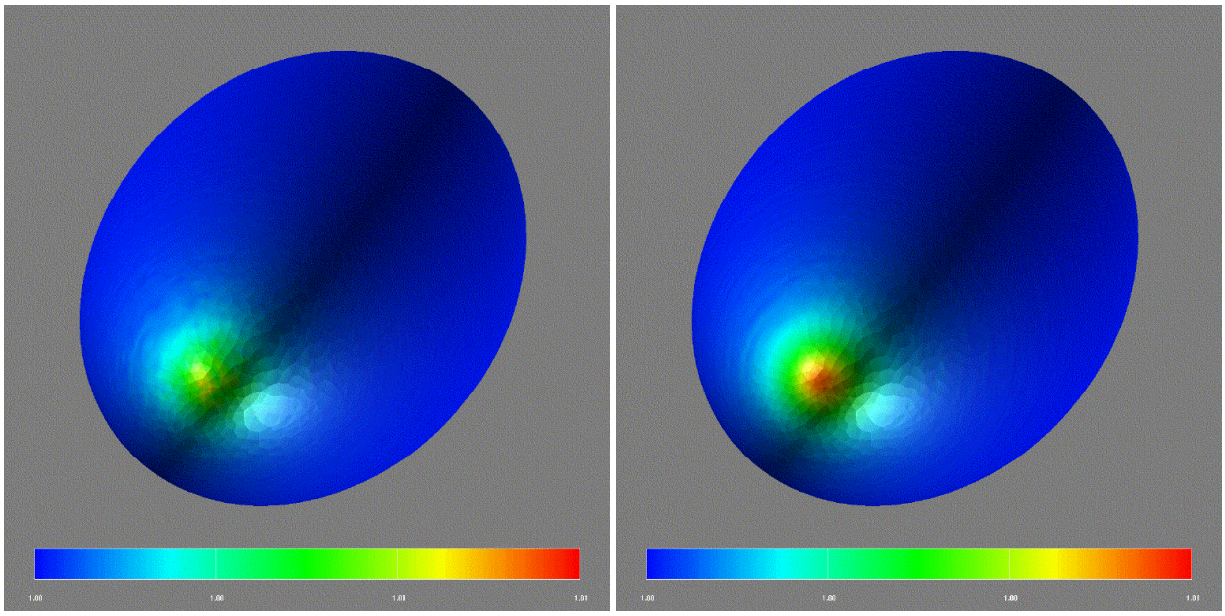


FIG. 24 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue arrière sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

Schéma	c_x	c_y	c_z	$M_{\min}$	$M_{\max}$
LDA	1.3533995×10^{-2}	6.2297514×10^{-4}	2.7166696×10^{-3}	0.0066594	0.104397
LDA p	1.8316349×10^{-3}	8.7982875×10^{-5}	5.7201715×10^{-4}	0.0091874	0.104759

TAB. 1 – Résultats pour le maillage 1

Schéma	c_x	c_y	c_z	$M_{\min}$	$M_{\max}$
LDA	6.1217938×10^{-3}	8.0635299×10^{-4}	1.5429666×10^{-5}	0.0069313	0.104690
LDA p	1.8728677×10^{-3}	4.2992899×10^{-4}	3.1337708×10^{-4}	0.0115395	0.104742

TAB. 2 – Résultats pour le maillage 2

Schéma	c_x	c_y	c_z	$M_{\min}$	$M_{\max}$
LDA	4.8598671×10^{-3}	5.5572088×10^{-4}	7.8469067×10^{-5}	0.0075916	0.104492
LDA p	1.4249271×10^{-3}	2.4253974×10^{-5}	1.3718999×10^{-4}	0.0099174	0.104565

TAB. 3 – Résultats pour le maillage 3

6.2.2 Incidence non nulle, $\alpha = 5°$ et $\theta = 0°$

Dans cette section, l'ellipsoïde possède un angle d'incidence α de $5°$. Comme précédemment, nous présentons les résultats pour les schémas LDA et LDA préconditionné. Les courbes de convergence sont représentées sur les figures 35, 36 et 37. Les figures 25, 26 et 27 représentent une coupe en $z = 0$ du nombre de Mach pour les trois maillages. Nous reprenons les mêmes observations formulées dans la section précédente à savoir le caractère dissipatif du schéma LDA. En effet, le couche d'entropie est largement visible sur le nez entrant de l'ellipsoïde. Ces résultats sont confirmés par les figures 28, 29 et 30 qui sont des coupes du domaine en $y = 0$. Un zoom des résultats sur le maillage 2 est représenté sur le figure 31. Cette dernière met en évidence l'altération des lignes de Mach au niveau de la paroi pour le schéma LDA.

Les figures 32, 33 et 34 représente la production d'entropie sur le plan de coupe $y = 0$. Le schéma LDA présente la plus forte production d'entropie.

Comme dans le cas d'une incidence nulle, nous validons nos propos à l'aide de vues en trois dimensions de l'avant et de l'arrière de l'ellipsoïde. De la figure 38 à 45, nous représentons les distributions de pression et du nombre de Mach sur le bord de l'objet. Sur la figure 38, nous voyons que la distribution de pression est mieux localisée pour le schéma LDA préconditionné que pour le schéma LDA. Toutes les figures présentées illustrent bien la qualité de l'approche que nous avons considéré.

Pour conclure cette section, les tableaux 4, 5 et 6 regroupent les résultats pour les trois maillages en donnant les valeurs des coefficients aérodynamiques c_x, c_y et c_z ainsi que les valeurs minimales et maximales du nombre de Mach.

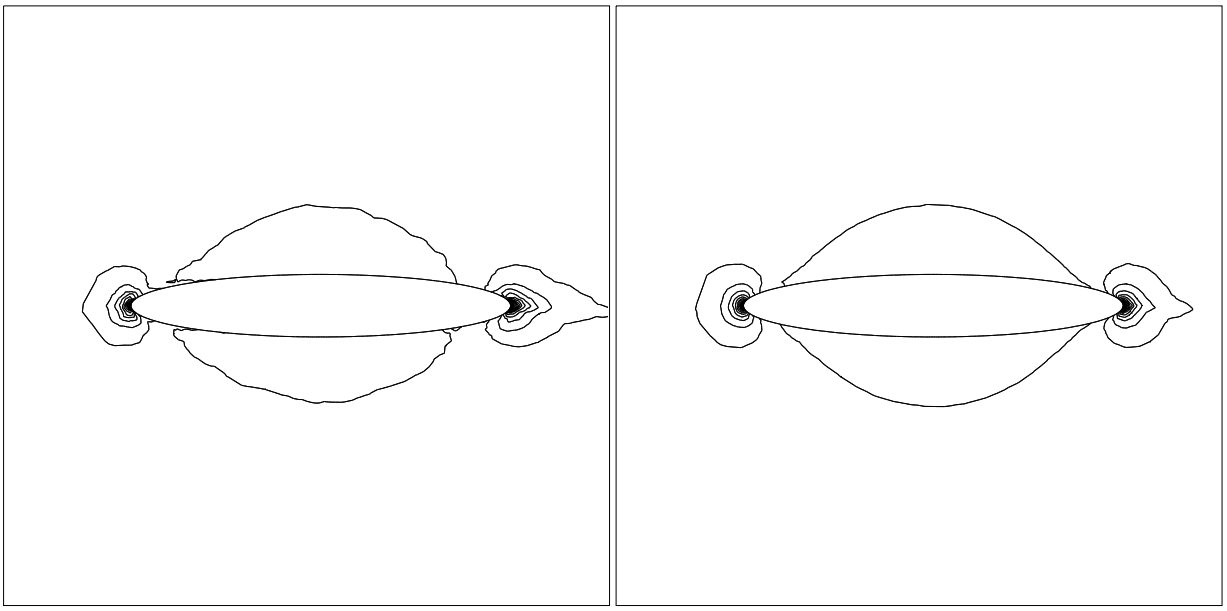


FIG. 25 – Maillage 1, coupe en $z = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.01358 à 0.10621). Gauche : schéma LDA, $0.02056 \leq M \leq 0.10466$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01449 \leq M \leq 0.10530$.

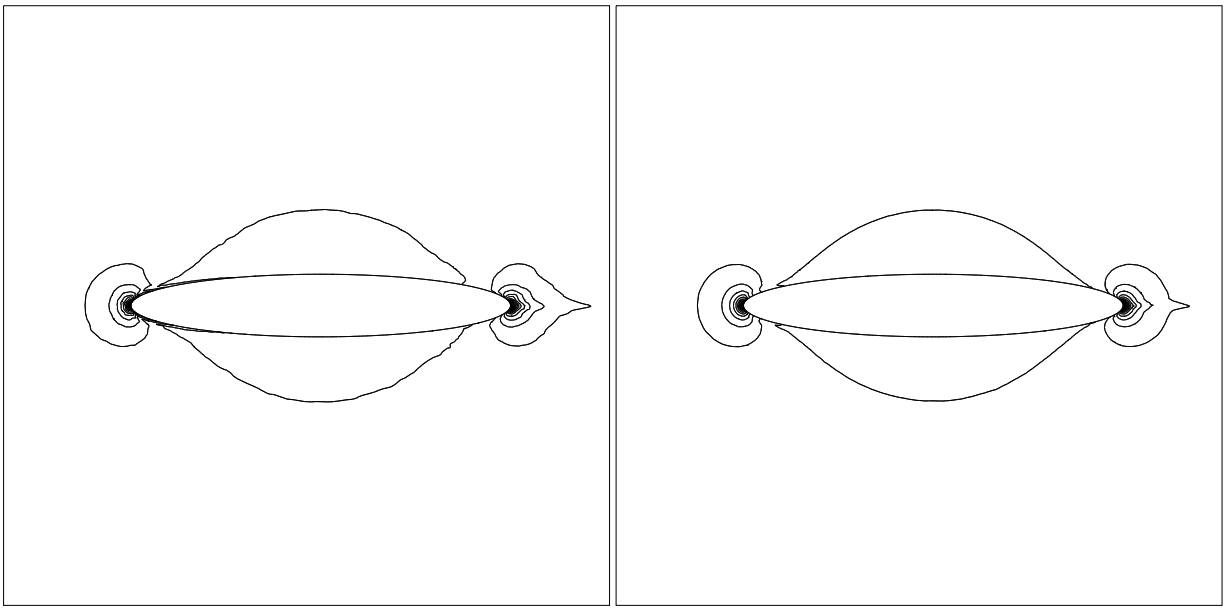


FIG. 26 – Maillage 2, coupe en $z = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.01002 à 0.10653). Gauche : schéma LDA, $0.0128 \leq M \leq 0.10502$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01097 \leq M \leq 0.10558$.

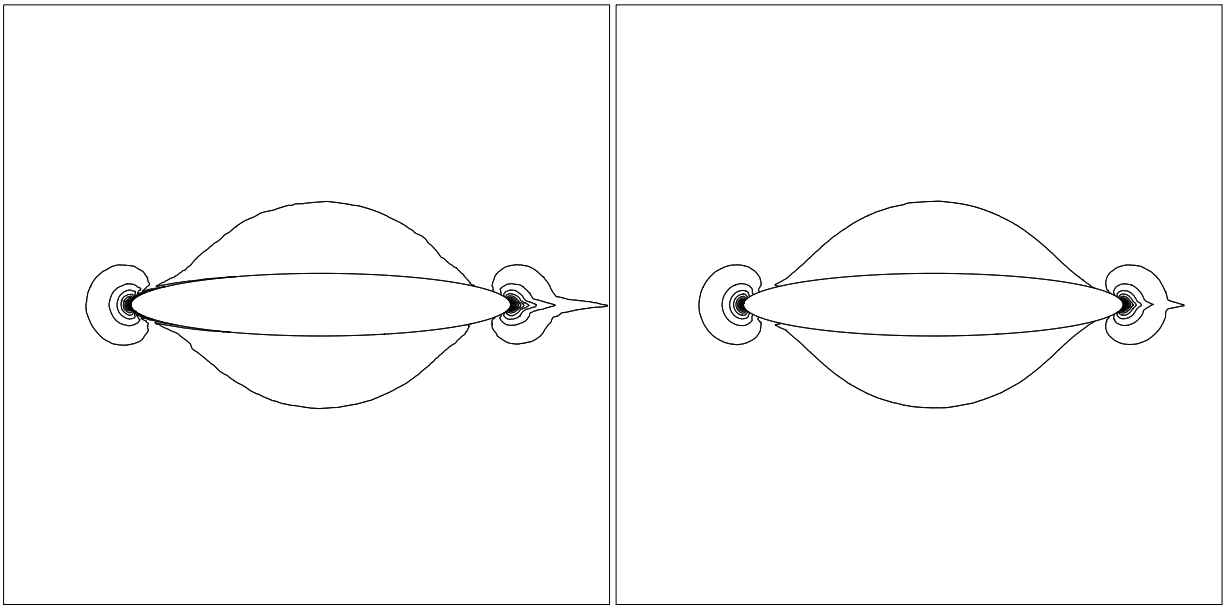


FIG. 27 – Maillage 3, coupe en $z = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.00997 à 0.10635). Gauche : schéma LDA, $0.01091 \leq M \leq 0.10506$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01139 \leq M \leq 0.10541$.

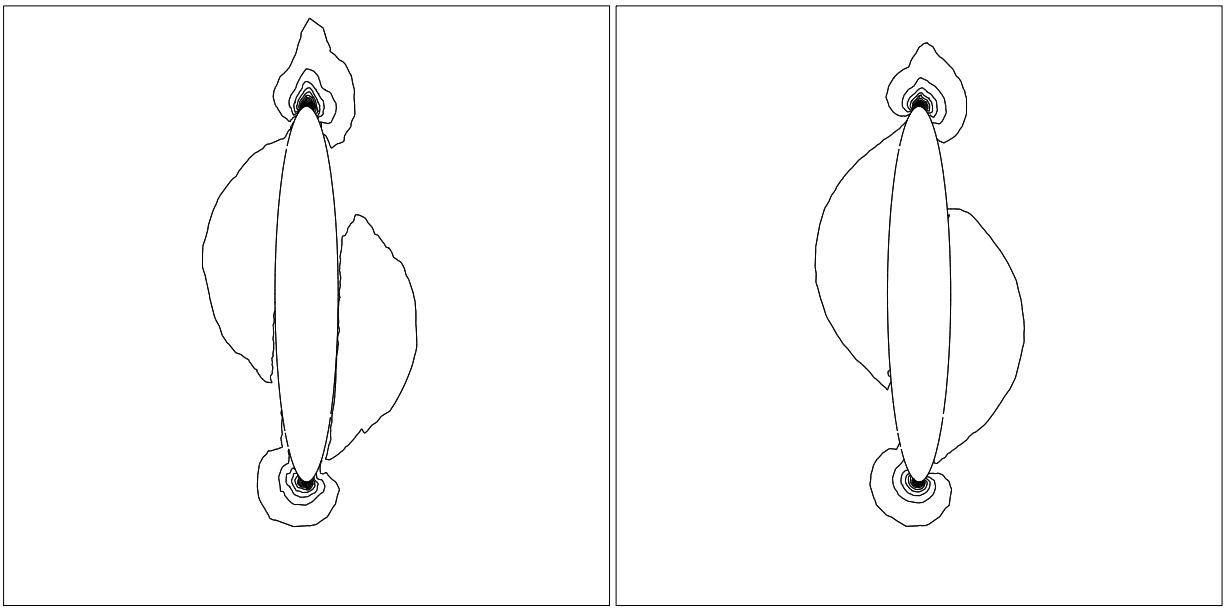


FIG. 28 – Maillage 1, coupe en $y = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.00787 à 0.10642). Gauche : schéma LDA, $0.0092 \leq M \leq 0.10431$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.00883 \leq M \leq 0.10546$.

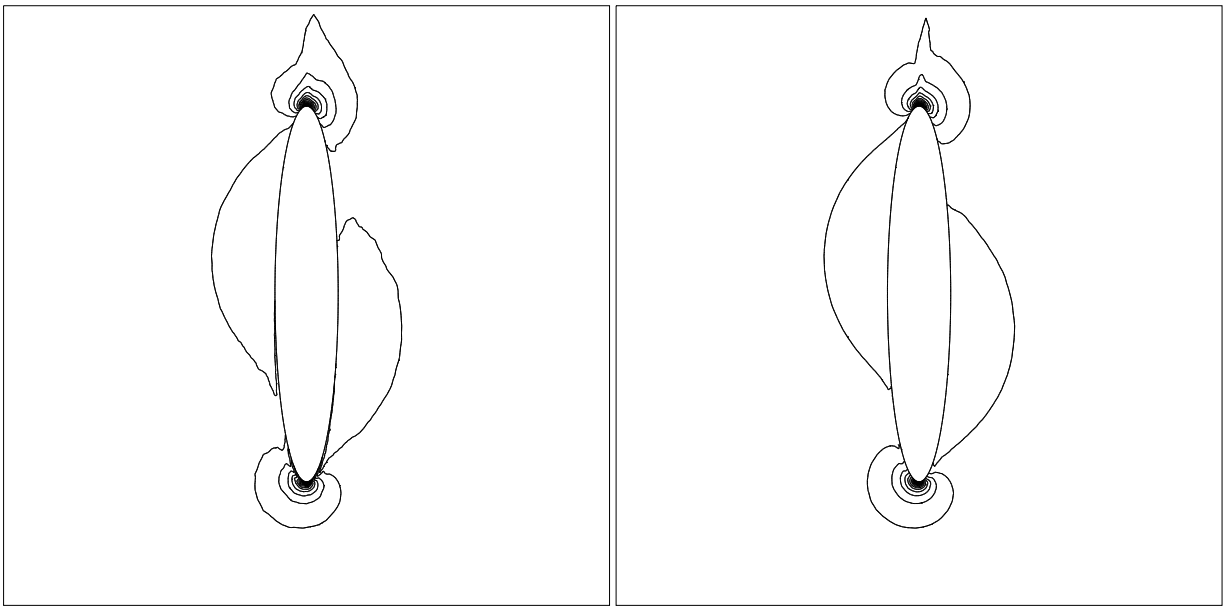


FIG. 29 – Maillage 2, coupe en $y = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.01059 à 0.10649). Gauche : schéma LDA, $0.01415 \leq M \leq 0.1053$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01154 \leq M \leq 0.10555$.

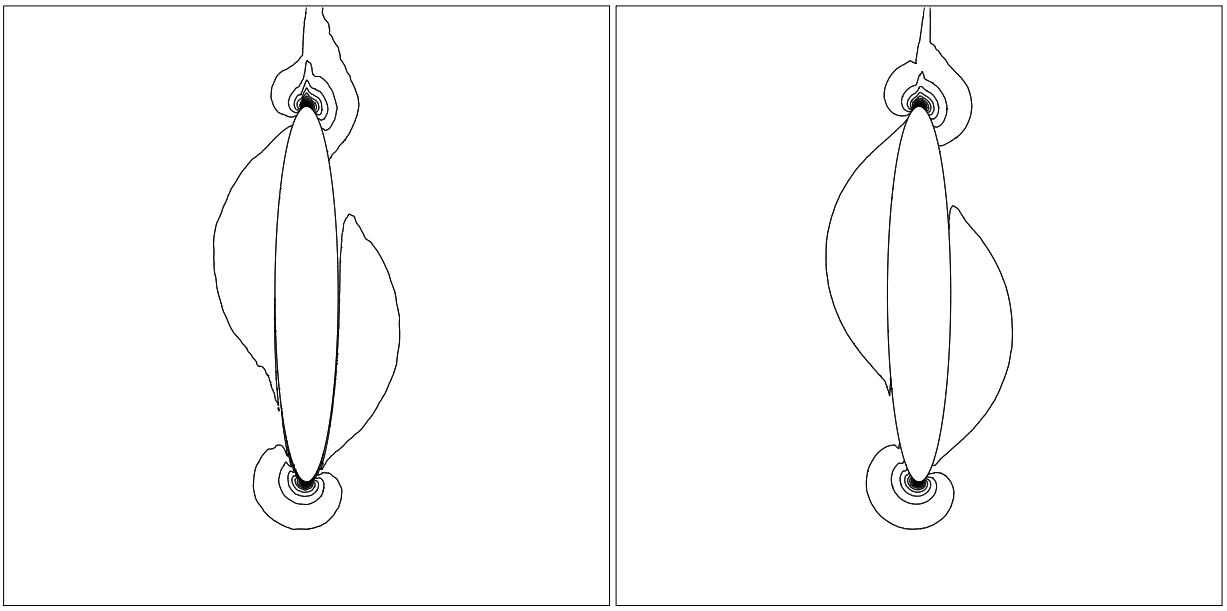


FIG. 30 – Maillage 3, coupe en $y = 0$. Nombre de Mach (20 contours de 0.01156 à 0.10649). Gauche : schéma LDA, $0.01278 \leq M \leq 0.10506$. Droite : schéma LDA préconditionné, $0.01249 \leq M \leq 0.10555$.

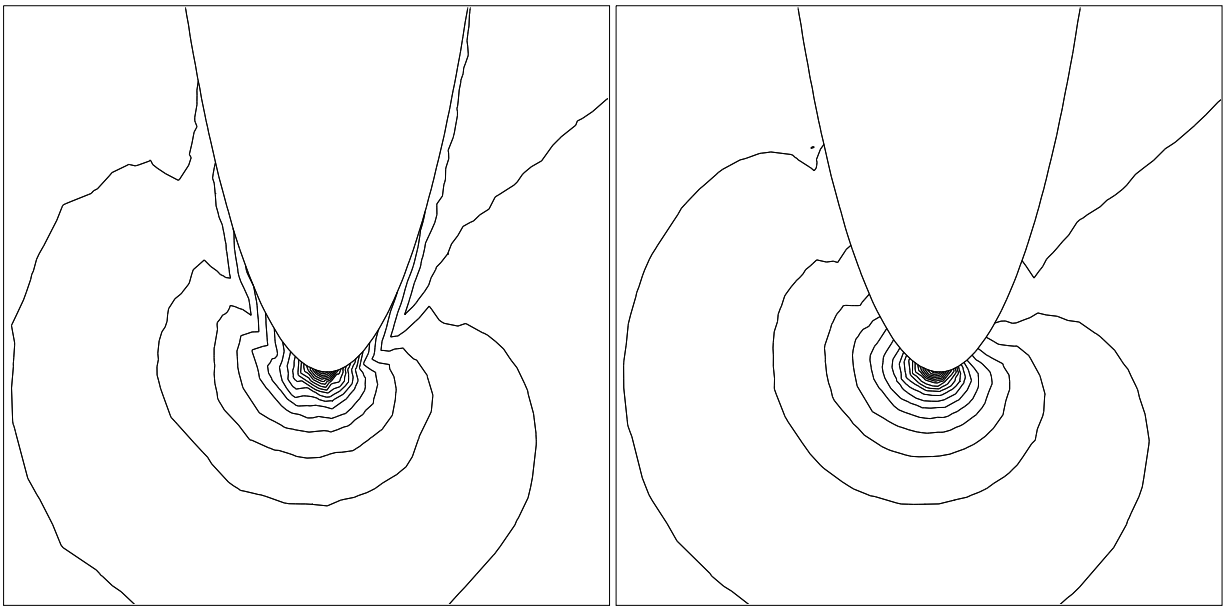


FIG. 31 – Nombre de Mach, zoom sur le plan $y = 0$. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

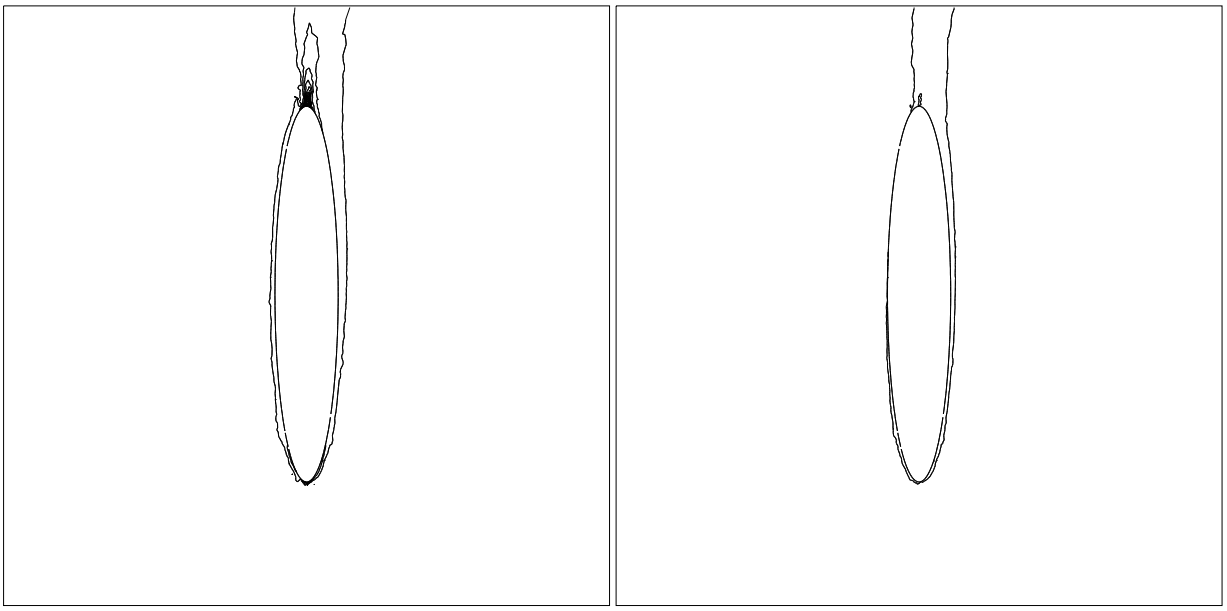


FIG. 32 – Maillage 1, coupe en $y = 0$. Entropie (20 contours de -0.47175 à -0.46694). Gauche : schéma LDA, $-0.471705 \leq S \leq -0.466988$. Droite : schéma LDA préconditionné, $-0.471091 \leq S \leq -0.470721$.

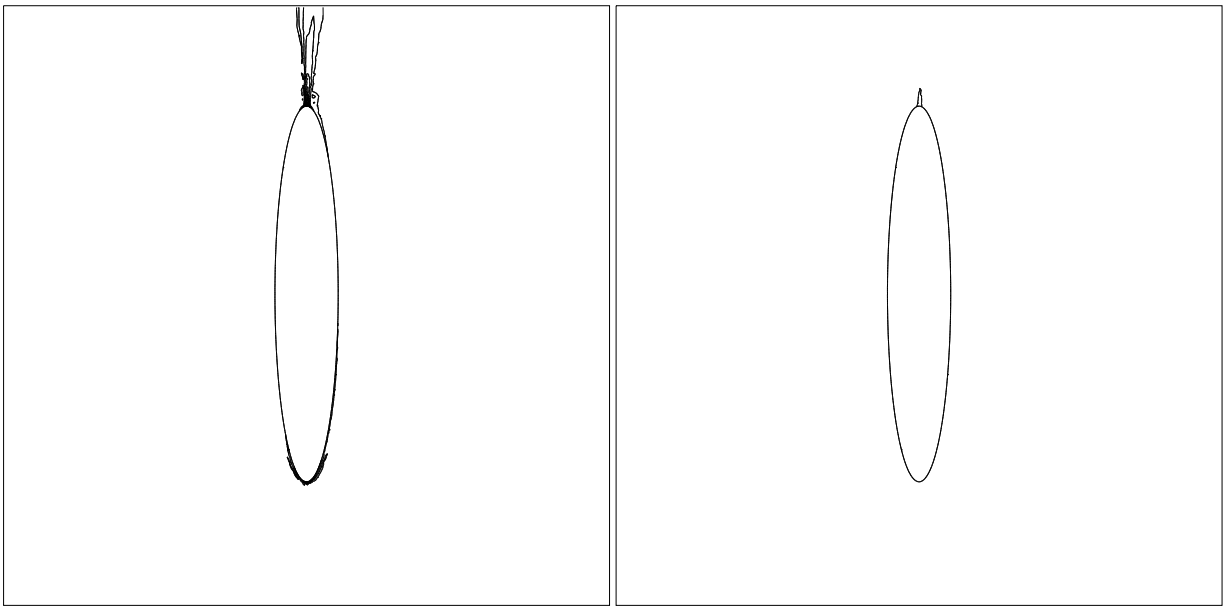


FIG. 33 – Maillage 2, coupe en $y = 0$. Entropie (20 contours de -0.47179 à -0.46572). Gauche : schéma LDA, $-0.471731 \leq S \leq -0.46577$. Droite : schéma LDA préconditionné, $-0.471106 \leq S \leq -0.470723$.

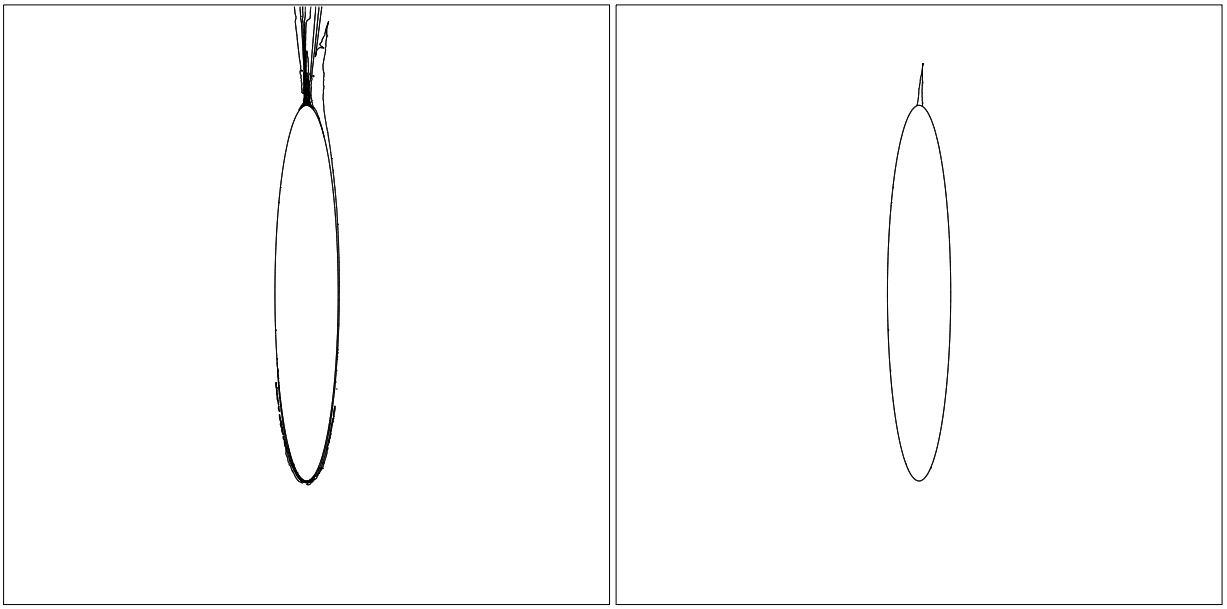


FIG. 34 – Maillage 3, coupe en $y = 0$. Entropie (20 contours de -0.47164 à -0.46663). Gauche : schéma LDA, $-0.471592 \leq S \leq -0.466679$. Droite : schéma LDA préconditionné, $-0.471115 \leq S \leq -0.470756$.

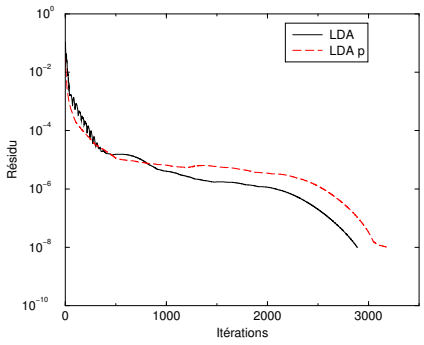


FIG. 35 – Courbes de convergence pour le maillage 1

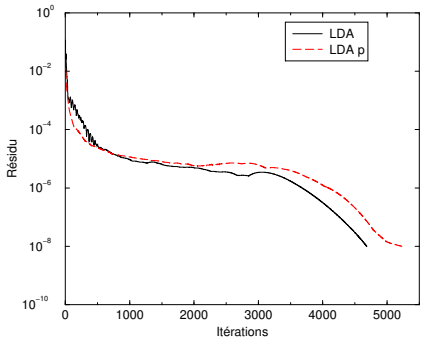


FIG. 36 – Courbes de convergence pour le maillage 2

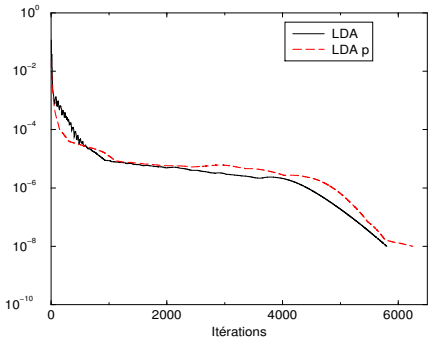


FIG. 37 – Courbes de convergence pour le maillage 3

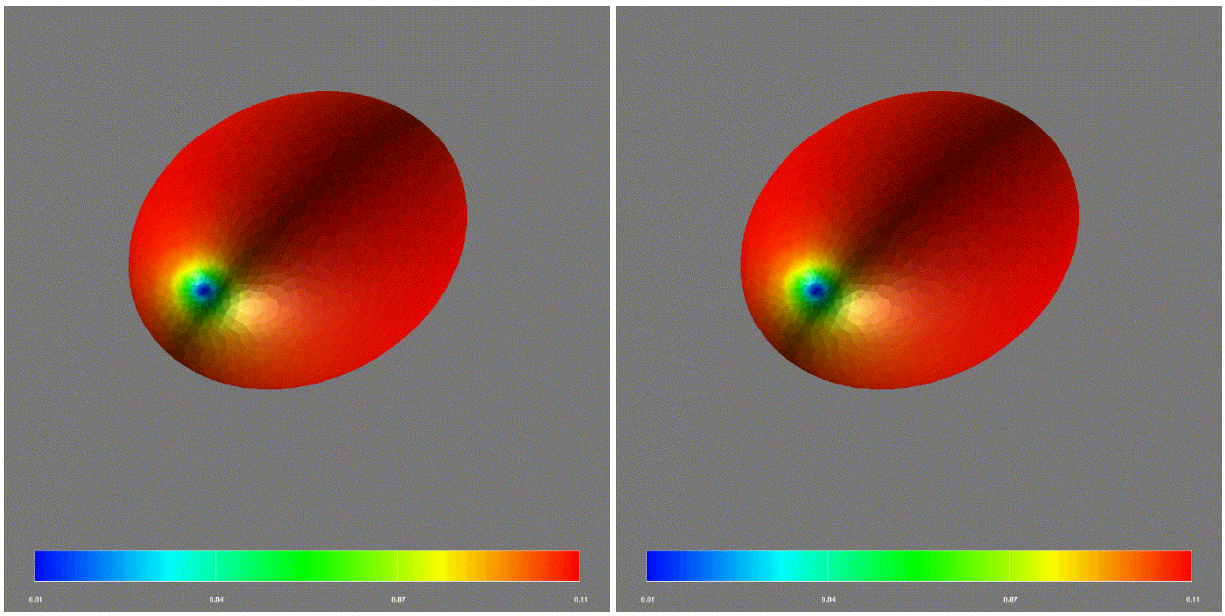


FIG. 38 – Nombre de Mach, vue avant sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

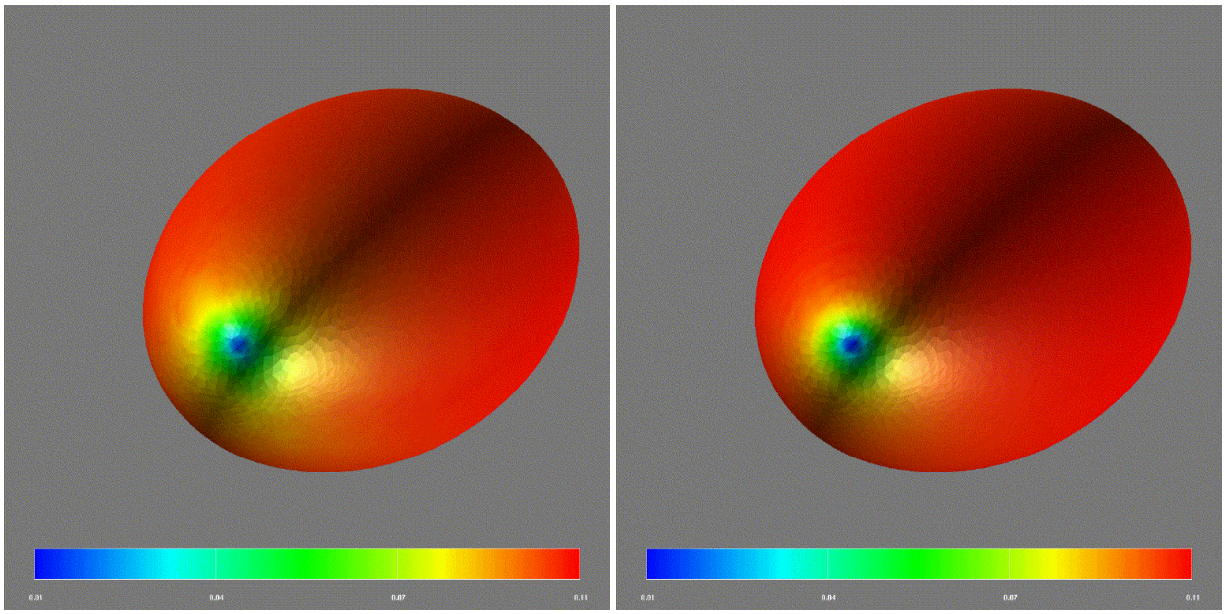


FIG. 39 – Nombre de Mach, vue avant sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

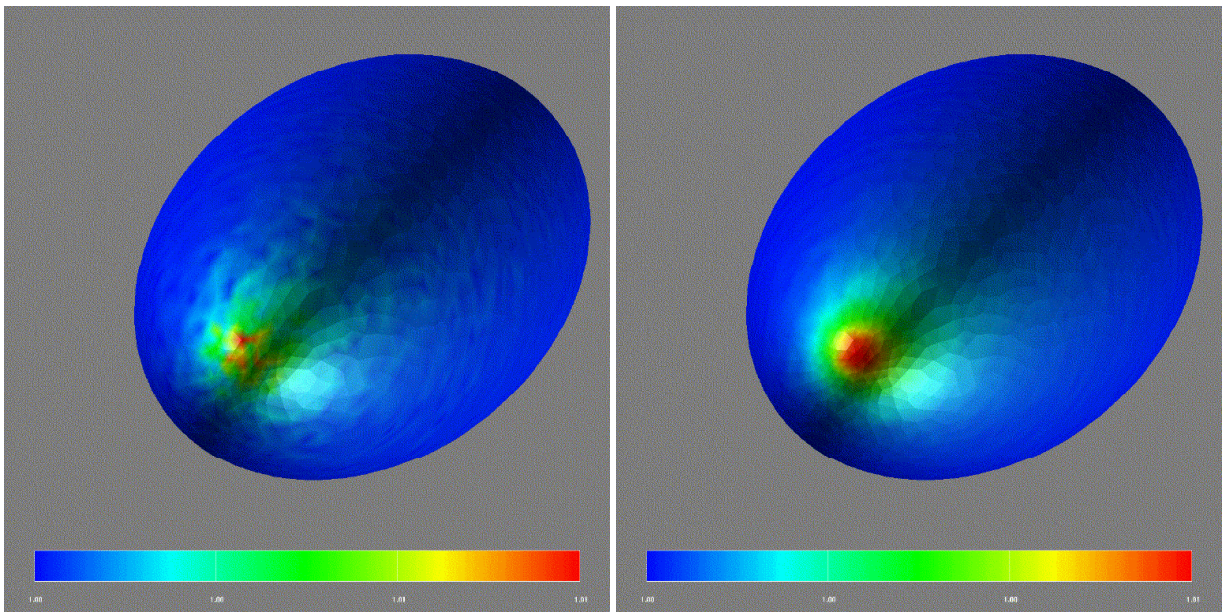


FIG. 40 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue avant sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

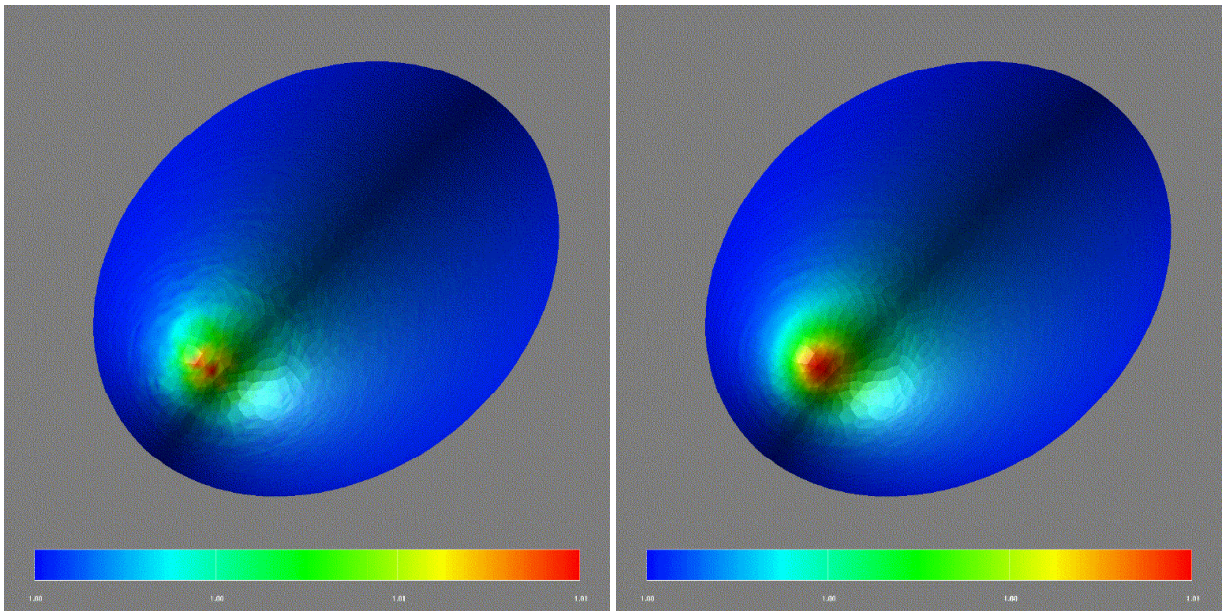


FIG. 41 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue avant sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

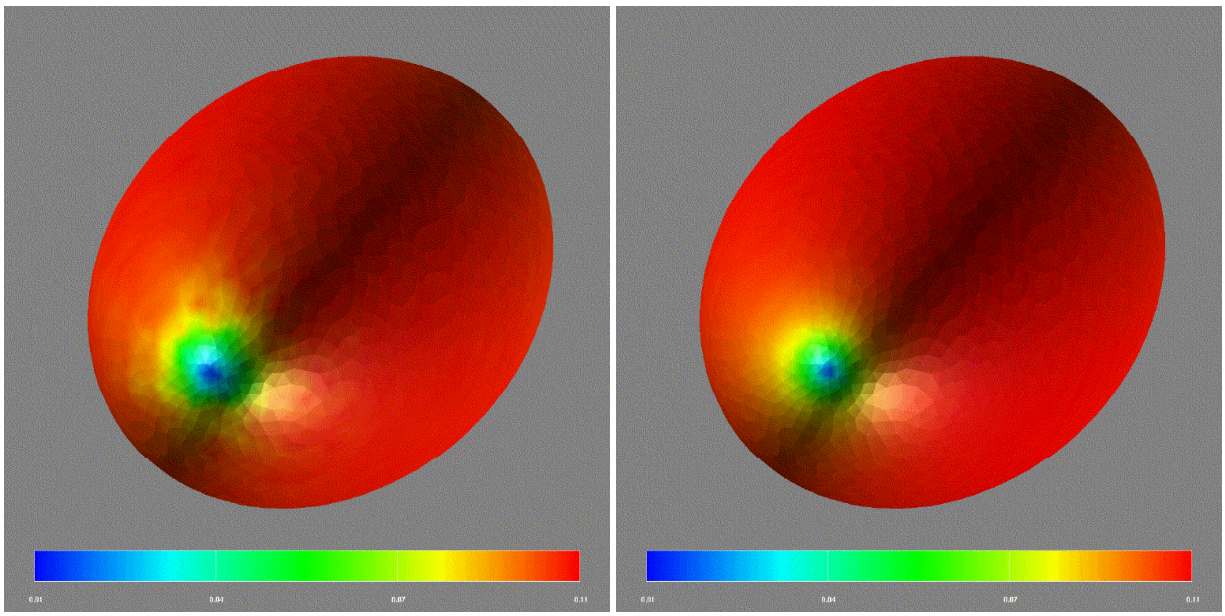


FIG. 42 – Nombre de Mach, vue arrière sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

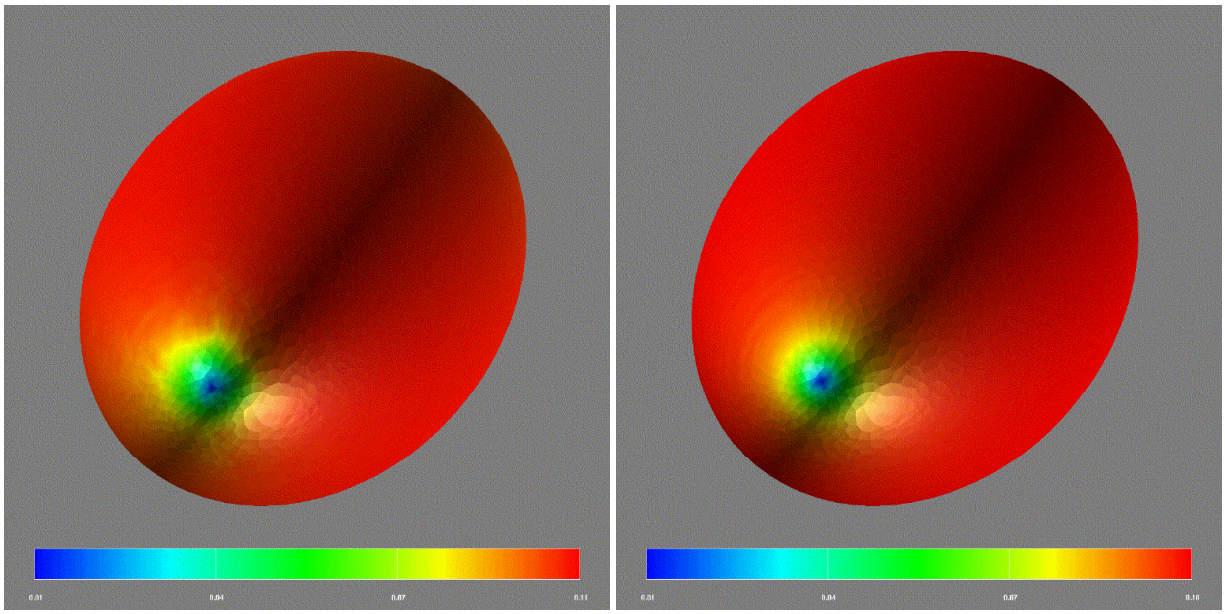


FIG. 43 – Nombre de Mach, vue arrière sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

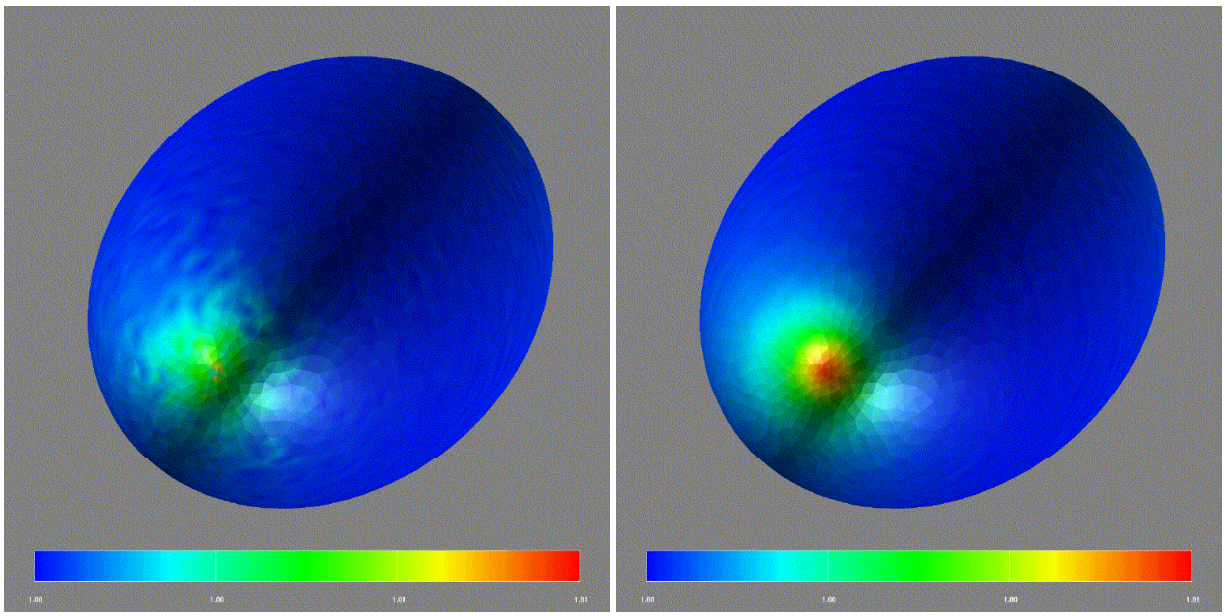


FIG. 44 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue arrière sur le maillage 1. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

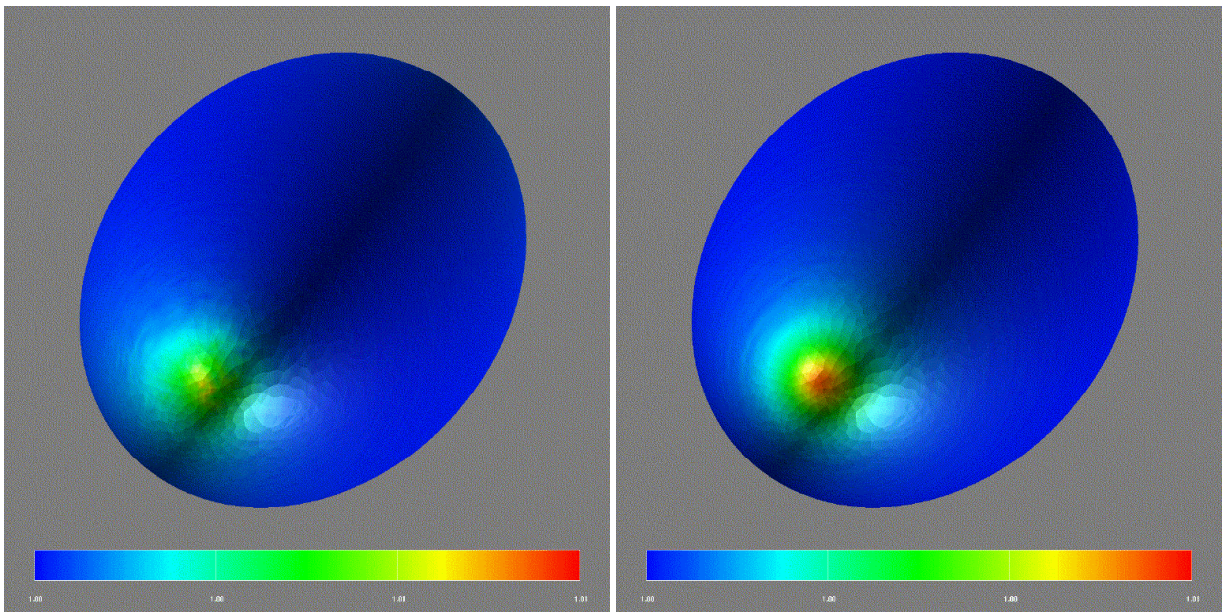


FIG. 45 – Pression $\tilde{p} = p/p_\infty$, vue arrière sur le maillage 3. Gauche : schéma LDA, droite : schéma LDA préconditionné

Schéma	c_x	c_y	c_z	$M_{\min}$	$M_{\max}$
LDA	$1.21925600 \times 10^{-2}$	$2.54240119 \times 10^{-3}$	$5.79615181 \times 10^{-2}$	0.00772397	0.105239
LDA p	$2.99748867 \times 10^{-3}$	$7.26402236 \times 10^{-6}$	$3.73971281 \times 10^{-2}$	0.00799792	0.105789

TAB. 4 – Résultats pour le maillage 1

Schéma	c_x	c_y	c_z	$M_{\min}$	$M_{\max}$
LDA	$5.39151064 \times 10^{-3}$	$2.15129387 \times 10^{-4}$	$2.53222833 \times 10^{-2}$	0.00597904	0.106904
LDA p	$2.24556909 \times 10^{-3}$	$1.39624877 \times 10^{-4}$	$2.00640363 \times 10^{-2}$	0.01072440	0.105952

TAB. 5 – Résultats pour le maillage 2

Schéma	c_x	c_y	c_z	$M_{\min}$	$M_{\max}$
LDA	$4.36904064 \times 10^{-3}$	$6.08386558 \times 10^{-4}$	$1.74050484 \times 10^{-2}$	0.00565767	0.106904
LDA p	$1.22098965 \times 10^{-3}$	$1.02931221 \times 10^{-4}$	$5.25777977 \times 10^{-3}$	0.01108230	0.105982

TAB. 6 – Résultats pour le maillage 3

6.3 Conclusion

Dans ce rapport nous avons décrit un schéma permettant le calcul de solutions tridimensionneles des équations d'Euler pour un gaz parfait. Les caractéristiques de ce schémas sont les suivantes :

– il est peu dissipatif,
– il est compact,
– ses propriétés itératives sont convenables, on obtient facilement l'état stationnaire,
– c'est un schéma linéaire.

La compacité du schéma – on n'a besoin, pour rafraichir les variables à un sommet, de ne connaître que ses voisins immédiats– permet une parallélisation immédiate du schéma.

Enfin, la stabilité à faible mach a été améliorée par l'utilisation d'un préconditionnement original sans paramètre.

Les résultats obtenus sur le dirigeable montrent que les objectifs sont atteints. On note en particulier le caractère peu dissipatif du schéma en regardant les coupes d'entropie, et l'amélioration de la stabilité numérique en regardant les planches donnant les champs de pression et de Mach sur la peau du dirigeable.

Les perspectives sont nombreuses. Tout d'abord, il faudrait paraléliser le code. Ceci a été fait dans sa version bidimensionnelle. Il faudrait aussi inclure les effets visqueux sans pour autant changer le formalisme distributif. La résolution du système linéaire peut être améliorée, elle aussi. Enfin, il est souhaitable que des effets instationnaires soient aussi pris en compte, suivant les travaux de Mezine [2].

Remerciements

Les auteurs souhaiterais remercier Eric Schall, d'une part pour la fourniture des maillages de l'ellipsoïde et d'autre part pour les conseils concernant l'exploitation des résultats. Nos remerciements vont aussi à Boniface Nkonga a qui nous devons le squelette du code tridimensionnel FluidBox. Enfin, nous remercions Olivier Coulaud pour son aide dans la visualisation des résultats sous le logiciel AVS.

Références

[1] R. ABGRALL, *Toward the ultimate conservative scheme : following the quest*, J. Comput. Phys., 167 (2001), pp. 277–315.

[2] R. ABGRALL AND M. MEZINE, *Construction of second order accurate monotone and stable residual distribution schemes for steady flow problems.*, J. Comput. Phys., to appear.

[3] ——, *Construction of second order accurate monotone and stable residual distribution schemes for unsteady flow problems.*, J. Comput. Phys., 188 (2003), pp. 16–55.

[4] H. DECONINCK, H. PAILLÈRE, R. STRUIJS, AND P. ROE, *Multidimensional upwind schemes based on fluctuation-splitting for systems of conservation laws.*, Comput. Mech., 11 (1993), pp. 323–340.

[5] H. DECONINCK, P. ROE, AND R. STRUIJS, *A multidimensional generalization of Roe's flux difference splitter for the Euler equations.*, Comput. Fluids, 22 (1993), pp. 215–222.

[6] H. DECONINCK, K. SERMEUS, AND R. ABGRALL, *Status of multidimensional upwind residual distribution schemes and applications in aeronautics.*, in AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (Denver, 2000), AIAA, 2000.

[7] H. GUILLARD AND C. VIOZAT, *On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit.*, Comput. Fluids, 28 (1999), pp. 63–86.

[8] J. HENRIQUES AND L. GATO, *A Multi-Dimensional Upwind Matrix Distribution Scheme for Conservative Laws*, Comput. Fluids, to appear.

[9] E. ISSMAN, *Implicit solution strategies for compressible flow equations on unstructured grids*, PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 1997.

[10] E. ISSMAN, G. DEGREZ, AND H. DECONINCK, *Implicit upwind residual-distribution Euler and Navier-Stokes solver on unstructured meshes.*, AIAA J., 34 (1996), pp. 2021–2028.

[11] M. MEZINE, *Conception de schémas Distributifs pour l'aérodynamique stationnaire et instationnaire.*, PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2002.

[12] H. PAILLÈRE, *Multidimensional Upwind Residual Residual Distribution Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Grids.*, PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 1995.

[13] P. ROE, *Fluctuations and signals - A framework for numerical evolution problems.*, in Numerical methods for fluid dynamics, Proc. Conf., Reading/U.K. 1982, 219-257 , 1982.

[14] E. TURKEL, *Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations.*, J. Comput. Phys., 72 (1987), pp. 277–298.

[15] E. VAN DER WEIDE, *Compressible flow simulation on unstructured grids using multi-dimensional upwind schemes.*, PhD thesis, Delft University of technology, 1998.

[16] E. VAN DER WEIDE AND H. DECONINCK, *Positive matrix distribution schemes for hyperbolic systems.*, in Computational Fluid Dynamics 96, Wiley, pp. 747-753, Wiley, 1996.

[17] B. VAN LEER, W. LEE, AND P. ROE, *Characteristic time-stepping or local preconditioning of the euler equations*, in AIAA-91-1552, 1991.