

## Corrigé du TP noté

I. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . La  $N$ -transformée de Fourier discrète d'une suite  $\mathbf{s} = (s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$   $N$ -périodique est la suite (elle aussi  $N$ -périodique)  $\mathcal{F}_N[\mathbf{s}]$  définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}_N[\mathbf{s}](k) = \sum_{j=0}^{N-1} s(j) W_N^{jk} \quad \text{ou} \quad W_N := \exp(-2i\pi/N).$$

La transformation inverse est notée  $\mathcal{F}_N^{-1}$ ; elle agit sur les suites  $N$ -périodiques  $\widehat{\mathbf{s}}$  indexées par  $\mathbb{Z}$  de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}_N^{-1}[\widehat{\mathbf{s}}](k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{\mathbf{s}}(j) W_N^{-jk}.$$

- (1) Soient  $N \geq 2$  et  $k_1, k_2$  deux entiers tels que  $0 \leq k_1 < k_2 \leq N-1$ . Calculez à la main (sur  $\{0, \dots, N-1\}$ ) la  $N$ -transformée de Fourier discrète de la suite  $N$ -périodique  $\mathbf{s}_{[k_1, k_2]}$  définie par

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \mathbf{s}_{[k_1, k_2]}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 \leq k \leq k_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit encore  $N \geq 2$  et  $\omega > 0$ . Calculez (toujours à la main, sur  $\{0, \dots, N-1\}$ ) la  $N$ -transformée de Fourier discrète de la suite  $N$ -périodique  $\mathbf{s}^\omega$  définie par

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \mathbf{s}^\omega(k) = e^{2i\pi k \omega}.$$

Soit enfin  $N$  un entier supérieur ou égal à 2 qui se factorise sous la forme  $N = N_1 \times N_2$ , où ni  $N_1$ , ni  $N_2$  ne sont égaux à 1. Calculez (toujours à la main, sur  $\{0, \dots, N-1\}$ ) la  $N$ -transformée discrète de la suite  $N$ -périodique  $\mathbf{s}_{N_1, N_2}$  définie par :

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \mathbf{s}_{N_1, N_2}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } N_1 \text{ divise } k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La seule chose à savoir ici est la formule :

$$\forall Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{N-1} Z^k = \frac{Z^N - 1}{Z - 1}.$$

On a, pour tout  $j \in \{1, \dots, N-1\}$ , si  $W_N := \exp(-2i\pi/N)$  :

$$\begin{aligned} \widehat{s_{[k_1, k_2]}}(j) &= \sum_{k=k_1}^{k_2} W_N^{jk} = W_N^{jk_1} \times \sum_{l=0}^{k_2-k_1} W_N^{jl} = W_N^{jk_1} \times \frac{W_N^{j(k_2-k_1+1)} - 1}{W_N^j - 1} \\ &= \frac{W_N^{\frac{j(k_2-k_1+1)}{2}}}{W_N^{\frac{j}{2}}} W_N^{jk_1} \frac{W_N^{\frac{j(k_2-k_1+1)}{2}} - W_N^{-\frac{j(k_2-k_1+1)}{2}}}{W_N^{j/2} - W_N^{-j/2}} \\ &= W_N^{j(k_1+k_2)/2} \times \frac{\sin \frac{j(k_2-k_1+1)\pi}{N}}{\sin \frac{j\pi}{N}} \end{aligned}$$

(en utilisant  $W_N = \exp(-2i\pi/N)$  et  $e^{iu} - e^{-iu} = 2i \sin u$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ).  
Pour  $j = 0$ , on trouve  $\widehat{s_{[k_1, k_2]}}(0) = k_2 - k_1 + 1$ .

De même, on a, pour tout  $j \in \{0, \dots, N-1\}$  :

$$\begin{aligned} \widehat{s_\omega}(j) &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k\omega} e^{-2i\pi jk/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi(\omega-j/N)k} \\ &= \begin{cases} \frac{e^{2i\pi(\omega-j/N)N} - 1}{e^{2i\pi(\omega-j/N)} - 1} & \text{si } \omega - j/N \notin \mathbb{Z} \\ N \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a enfin, pour tout  $j \in \{0, \dots, N-1\}$  lorsque  $N = N_1 \times N_2$ ,

$$\widehat{s_{N_1, N_2}}(j) = \sum_{k=0}^{N_2-1} W_N^{kN_1j/N} = \sum_{k=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{kj} = \begin{cases} N_2 & \text{si } j \equiv 0 \pmod{N_2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) Rédigez (via la routine `fft`) trois routines `fenetreHat.m`, `oscillHat.m` et `trousHat.m` :

```
>> S = fenetreHat (N,k1,k2) ;
>> S = oscillHat (N, omega) ;
>> S = trousHat (N1,N2) ;
```

permettant respectivement de calculer les  $N$ -transformées de Fourier discrètes des signaux digitaux  $s_{[k_1, k_2]}$ ,  $s^\omega$ , et  $s_{N_1, N_2}$  sur  $\{0, \dots, N-1\}$ . Imprimez les codes `.m` de ces routines (vous m'enverrez également les sources).

```
function S = fenetreHat(N,k1,k2);
s = zeros(1,N);
s(k1+1:k2+1) = ones(1,k2-k1+1);
S = fft(s,N);
```

```
function S = oscillHat(N,omega);
k = 0:N-1;
s = exp(2*sqrt(-1)*pi*k*omega);
S = fft(s,N);
```

```
function S=trousHat(N1,N2);
s = zeros(1,N1*N2);
```

```
s(1:N1:N1*N2) = ones(1,N2);
S = fft(s,N1*N2);
```

- (3) On considère dans cette question<sup>1</sup> des signaux  $t \in \mathbb{R} \mapsto s(t)$  enregistrés à une certaine fréquence (en Hertz) et ainsi discrétisés. Téléchargez depuis le site :

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/MATLABSignal/TPnote>

les fichiers `spectrogramme.m` et `signalQ3.mat`. Le signal `signalQ3.mat` (que vous chargerez dans votre environnement `MATLAB` via `load signalQ3`) correspond ainsi à l'enregistrement d'un signal analogique à une fréquence de 400 Hz. Combien de temps a duré l'enregistrement ? Étudiez la syntaxe du code `spectrogramme.m`, puis exploitez ce code (vous utiliserez comme en TD pour  $w$  une fenêtre de Hamming :  $w = \text{hamming}(N)$ , avec  $N$  judicieusement choisi, à vous de voir) pour décrire le contenu fréquentiel du signal `signalQ3`, à savoir :

- les fréquences présentes pendant toute la durée de l'enregistrement (vous en donnerez une valeur approchée en Hz) ;
- les fréquences apparaissant de manière sporadique ; vous en donnerez aussi une valeur approchée (en Hz) et préciserez chaque fois le nombre de fenêtres temporelles où, à votre avis, l'apparition sporadique de cette fréquence concernée a lieu ;
- les évolutions linéaires de fréquences, s'il en existe, en en précisant la pente.

Accompagnez votre travail de quelques figures justificatives (utiliser la routine `print` pour imprimer une figure sous `MATLAB`), en faisant varier la longueur  $N$  de la fenêtre (de Hamming) d'observation.

Comme on constate que le signal `signalQ3` est un signal digital (donné en colonne) de longueur 1024 et qu'il y a eu 400 enregistrements par seconde (le signal étant échantillonné à 400 Hz), la durée d'enregistrement du signal est de  $1024/400 = 2.56$  secondes. Si l'on analyse la routine

```
f = spectrogramme(w,s,M);
```

on constate que la bande fréquentielle  $[0, \pi[$  (discrétisée ici en  $E[M/2]$  canaux) est en fait à interpréter comme la bande passante entre 0 et 200 Hz puisque  $[-\pi, \pi]$  (prenant en compte les fréquences positives et leurs symétriques puisqu'il s'agit d'un signal réel) devrait correspondre à un intervalle fréquentiel entre -200 Hz et 200 Hz (le signal étant échantillonné à 400 Hz). En prenant  $M = 400$  dans `spectrogramme`, on obtient bien ces 200 canaux de fréquences, chaque canal fréquentiel correspondant à 1 Hz. Il semble judicieux de prendre pour l'exploration du signal une fenêtre de Hamming de longueur 64 (des valeurs plus grandes ne permettant pas une analyse suffisamment fine du signal en temps-fréquences). L'image donnée par la routine `spectrogramme` est reproduite comme la figure 0.1. On constate les faits suivants :

---

1. Directement inspirée de ce qui a été fait en TP dans la feuille de TP 3 concernant l'analyse (et la synthèse) des signaux analogiques (discrétisés) à la fois en temps et en fréquences, c'est-à-dire selon le codage « musical » suivant deux axes, celui des temps (horizontal, de gauche à droite) et celui des fréquences (vertical, de haut en bas).

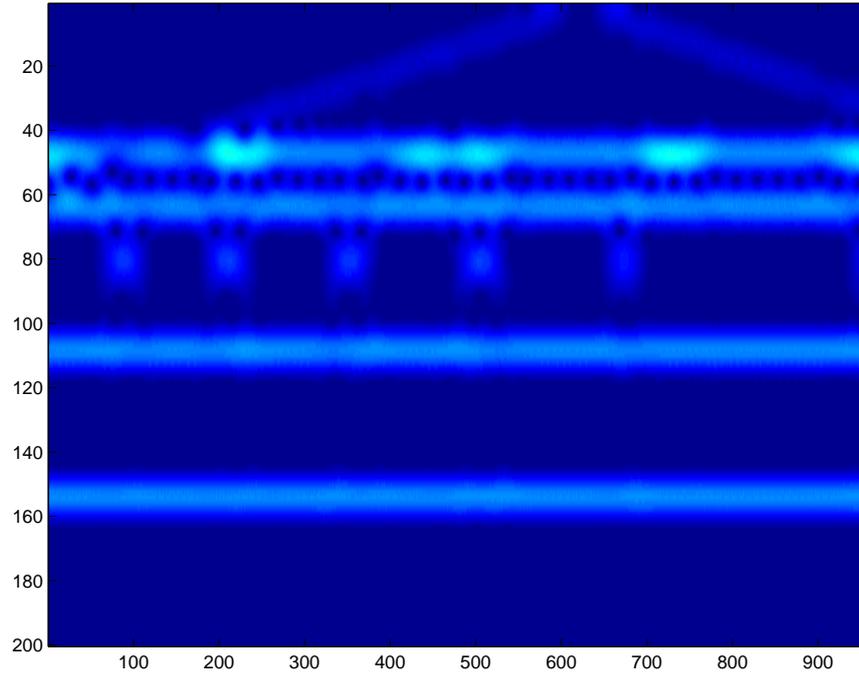


FIGURE 0.1. Spectrogramme de `signalQ3`, `w=hamming(64)`, `M=400`

- il y a quatre fréquences présentes pendant tout l'enregistrement, égales (approximativement) à 45 Hz, 62 Hz, 107 Hz, 157 Hz ;
- deux fréquences apparaissent de manière sporadique (ou avec une amplitude différente de leur amplitude constante) : l'une à environ 80 Hz (pendant six fenêtres temporelles de durée courte, chaque fenêtre étant de longueur entre 10 et 20, donc de durée entre .025 et .05 secondes), l'autre à 45 Hz (il y a ici juste une modification d'amplitude de la fréquence fixe lors de 6 ou 7 fenêtres temporelles, de durée un peu plus longue que les précédentes, disons entre .05 et .075 secondes) ;
- on observe enfin une évolution linéaire de fréquences ; la pente est approximativement  $-40/650 \simeq -0.06$ , la fréquence 0 étant atteinte au bout de  $650/400 \simeq 1.6$  secondes ; ensuite les fréquences augmentent avec la pente positive .06 (opposée de la pente négative précédente).

II. Étant donnée une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , 1-périodique et telle que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(\omega)| d\omega < +\infty,$$

(i.e. de norme  $L^1$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  finie), on définit la liste de ses coefficients de Fourier complexes comme la liste  $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ , où :

$$c_k(f) := \int_0^1 f(\omega) e^{-2i\pi k\omega} d\omega, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La série de Fourier  $S[f]$  de  $f$  est alors (formellement) la série de fonctions

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2i\pi k\omega}$$

et l'on dit qu'elle converge normalement si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| < +\infty.$$

Dans ce cas, sa somme

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^M c_k(f) e^{2i\pi k\omega}$$

définit une fonction continue 1-périodique qui, si  $f$  est supposée continue, coïncide avec  $f$  partout. On rappelle que les routines `spectre` et `ispectre` (que vous téléchargerez sur le même site `TPnote` que celui où a été téléchargé le matériel pour la question **3**), utilisées sous la forme :

```
>> C = spectre(fM,1/2) ;
>> fM = ispectre(C,2*pi*M) ;
```

permettent :

- étant donné un entier  $M$ , de calculer de manière approchée la liste  $C$  des  $2M$  coefficients de Fourier de  $f$  pour  $k$  variant entre  $-M$  et  $M-1$  (dans cet ordre) à partir de l'échantillonnage  $fM$  de  $f$  sur  $[-1/2, 1/2[$  avec un pas de  $1/(2M)$  ;
- étant donné ce même entier  $M$  et une liste  $C$  de nombres complexes de longueur  $2M$ ,  $C=[c_{-M}, \dots, c_{M-1}]$ , de récupérer la liste des valeurs du polynôme trigonométrique

$$\omega \mapsto \sum_{k=-M}^{M-1} c_k e^{2i\pi k\omega}$$

aux  $2M$  points  $\omega = -1/2 + j/(2M)$ ,  $j = 0, \dots, 2M-1$ .

Ces deux routines ont été abondamment exploitées dans la feuille de TP2.

- (4) Calculez (à la main) les coefficients de Fourier  $c_k(f)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) des fonctions 1-périodiques définies respectivement sur  $[-1/2, 1/2[$  par :

$$f_1(\omega) := |\omega|, \quad f_2(\omega) := \omega^2.$$

Vérifiez vos calculs numériquement avec la routine `spectre` lorsque  $k = -1024 : 1023$ . Quelle est la régularité de ces fonctions considérées comme des fonctions 1-périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (sont-elles continues ?  $C^1$  ?  $C^1$  par morceaux ?). Que pouvez vous en déduire concernant la convergence des séries de Fourier de  $f_1$  et  $f_2$  ? Du fait que  $f_2 \equiv f_1 \times f_1$ , quelle relation relie la liste  $(c_k(f_1))_{k \in \mathbb{Z}}$  à la liste  $(c_k(f_2))_{k \in \mathbb{Z}}$  des coefficients de  $f_2$  ?

On a, si  $k \neq 0$ , par parties :

$$\begin{aligned}
 c_k(f_1) &= \int_{-1/2}^{1/2} |\omega| e^{-2ik\pi\omega} d\omega = \int_0^{1/2} \omega e^{-2ik\pi\omega} d\omega + \int_{-1/2}^0 (-\omega) e^{-2ik\pi\omega} d\omega \\
 &= \int_0^{1/2} \omega e^{-2ik\pi\omega} d\omega + \int_0^{1/2} \omega e^{2ik\pi\omega} d\omega \\
 &= 2 \int_0^{1/2} \omega \cos(2k\pi\omega) d\omega \quad (\text{car } e^{iu} + e^{-iu} = 2 \cos u) \\
 &= 2 \left[ \omega \frac{\sin(2\pi k\omega)}{2k\pi} \right]_0^{1/2} - 2 \int_0^{1/2} \frac{\sin(2\pi k\omega)}{2k\pi} d\omega = \frac{(-1)^k - 1}{2\pi^2 k^2}.
 \end{aligned}$$

On a aussi  $c_0(f_1) = 1/4$ . En ce qui concerne  $f_2$ , on a

$$c_0(f_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \omega^2 d\omega = \frac{1}{12}$$

et, pour  $k \neq 0$ , par parties :

$$\begin{aligned}
 c_k(f_2) &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega \frac{e^{-2i\pi k\omega}}{i\pi k} d\omega = \frac{1}{i\pi k} \left[ -\omega \frac{e^{-2i\pi k\omega}}{2i\pi k} \right]_{-1/2}^{1/2} \\
 &= \frac{(-1)^k}{2\pi^2 k^2}.
 \end{aligned}$$

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont toutes deux  $C^1$  par morceaux (donc continues) comme fonctions 1-périodiques. Aucune des deux n'est par contre de classe  $C^1$  (comme fonction 1-périodique). Les séries de Fourier de  $f_1$  et  $f_2$  sont donc normalement convergentes, ce que l'on retrouve au vu des expressions des coefficients de Fourier. Comme  $f_2 = f_1 \times f_1$ , on a

$$c_k(f_2) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l(f_1) c_{k-l}(f_1)$$

puisque la transformation de Fourier  $f \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$  échange les opérations de multiplication ponctuelle (des fonctions 1-périodiques de série de Fourier normalement convergente) et de convolution des suites de  $l^1(\mathbb{Z})$ . La vérification des formules numériquement se fait par exemple (pour  $f_1$ ) par :

```

>> k = -1024 : -1 ;
>> c = ((-1).^k - 1) ./ (2*(pi^2)*(k.^2));
>> kk = 1:1023;
>> cc = ((-1).^kk - 1) ./ (2*(pi^2)*(kk.^2));
>> C = [c 1/4 cc] ;
>> f = ispectre(C', 2048);

```

La vérification est identique en ce qui concerne  $f_2$ .

- (5) Calculez (à la main) les coefficients de Fourier  $c_k(f)$  de la fonction 1-périodique définie sur  $[-1/2, 1/2[$  par

$$f(\omega) := \frac{e^{\pi\omega} + e^{-\pi\omega}}{2}$$

et vérifiez que ces calculs sont bien conformes à ceux que vous faites numériquement grâce à `spectre` lorsque  $k = -1024 : 1023$ .

On a, pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2} \left( \int_{-1/2}^{1/2} e^{\pi(1-2ik)\omega} d\omega + \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\pi(1+2ik)\omega} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{e^{\pi(1-2ik)\omega}}{1-2ik} \right]_{-1/2}^{1/2} - \left[ \frac{e^{-\pi(1+2ik)\omega}}{1+2ik} \right]_{-1/2}^{1/2} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi(1+4k^2)} (e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}). \end{aligned}$$

Pour effectuer la vérification demandée, on utilise `spectre` ainsi :

```
>> t = -1/2:1/2028:1/2-1/2048;
>> f = (1/2) * (exp(-pi*t) + exp(pi*t));
>> C = (spectre(f',1/2))';
>> k = -1024 : 1023;
>> a = exp(pi/2) - exp(-pi/2);
>> CC = a*(-1).^k./(pi*(1+4*k.^2));
>> max(abs(C-CC));
```

- (6) Si  $\omega \in [-1/2, 1/2[$ , que vaut, si  $\tilde{f}$  désigne la fonction 1-périodique obtenue en périodisant la fonction  $\omega \in [-1/2, 1/2[ \mapsto \chi_{[0,1/2[}(\omega) f(\omega)$  ( $f$  désignant la fonction introduite à la question 5)

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^{M-1} c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^M c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega} ?$$

(discutez pour cela suivant les valeurs de  $\omega$  et précisez le théorème du cours que vous invoquez). Justifiez aussi pourquoi les deux limites ci-dessus sont les mêmes. Mettez en évidence numériquement le phénomène de Gibbs (observé en TP, cf. la feuille de TP 2) et imprimez les figures à l'appui de vos constatations. Pourquoi ce phénomène de Gibbs se trouve-t-il « gommé » lorsque l'on regarde, au lieu de celles qui précèdent, la limite :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^{M-1} \left(1 - \frac{|k|}{M}\right) c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega} ?$$

Étayer encore vos affirmations avec des figures.

Les deux limites (si elles existent) sont toujours les mêmes car la suite  $(c_M(\tilde{f}))_{M \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers l'infini (lemme de Riemann-Lebesgue). En tout point  $\omega \in [-1/2, 1/2[$  où la fonction  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$  par morceaux, c'est-à-dire en tout point  $\omega \neq -1/2, 0$ , il résulte du théorème de Jordan-Dirichlet que l'on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^{M-1} c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^M c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega} = \tilde{f}(\omega).$$

Le même théorème de Jordan-Dirichlet assure (puisque la fonction  $\tilde{f}$  est dérivable à gauche et à droite en  $-1/2$  et  $0$ ) que l'on a en ces deux points :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^{M-1} c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^M c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega} = \frac{\tilde{f}(\omega_+) + \tilde{f}(\omega_-)}{2} = l$$

c'est-à-dire  $l = \cosh(\pi/2)/2$  si  $\omega = -1/2$ ,  $l = 1/2$  si  $\omega = 0$ . Si l'on considère la limite

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=-M}^{M-1} \left(1 - \frac{|k|}{M}\right) c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi k\omega}$$

le phénomène de Gibbs se trouve gommé du fait que le noyau de Fejér, au contraire du noyau de Dirichlet, est un noyau positif. On observe le phénomène de Gibbs en les points  $-1/2$  et  $0$  puisque la fonction  $\tilde{f}$  présente des irrégularités en ces points. On le met par exemple en évidence ainsi sous MATLAB :

```
>> t= -1/2:1/2048:-1/2048;
>> tt= 0:1/2048:1-1/2048;
>> f = zeros (size(t));
>> ff = (exp(pi*t) + exp(-pi*t))/2;
>> F = [f ff];
>> C = spectre (F,1/2);
>> C(1:512)=zeros(512,1);
>> C(2048-511:2048) = zeros(512,1);
>> FF = ispectre(CC,2048*pi);
>> T = [t tt];
>> plot(T,F);
>> hold
>> plot(T,real(FF), 'r');
```

On a choisi ici  $N = 512$  et  $1/2048$  comme pas d'échantillonnage sur  $[-1/2, 1/2[$ . Voir la figure 0.2 ci-dessous. Ce phénomène disparaît si l'on calcule la seconde limite. La figure 0.3 ci-dessous l'illustre. Les valeurs de  $N = 512$  et du pas d'échantillonnage  $1/2048$  choisies ici sont identiques à celles choisies pour la mise en évidence du phénomène de Gibbs sur la figure 0.2 précédente. Cette seconde figure a été réalisée ainsi :

```
>> t= -1/2:1/2048:-1/2048;
>> tt= 0:1/2048:1-1/2048;
>> f = zeros (size(t));
>> ff = (exp(pi*t) + exp(-pi*t))/2;
>> F = [f ff];
>> C = spectre (F,1/2);
>> [T,Fej] = noyauFejer(1024,512);
>> CC = C.* spectre(Fej,1/2);
>> FF = ispectre(CC,2048*pi);
>> plot(T,F);
>> hold
>> plot(T,real(FF), 'r');
```

(pour la routine `noyauFejer`, cf. la solution de la question 7 plus loin).

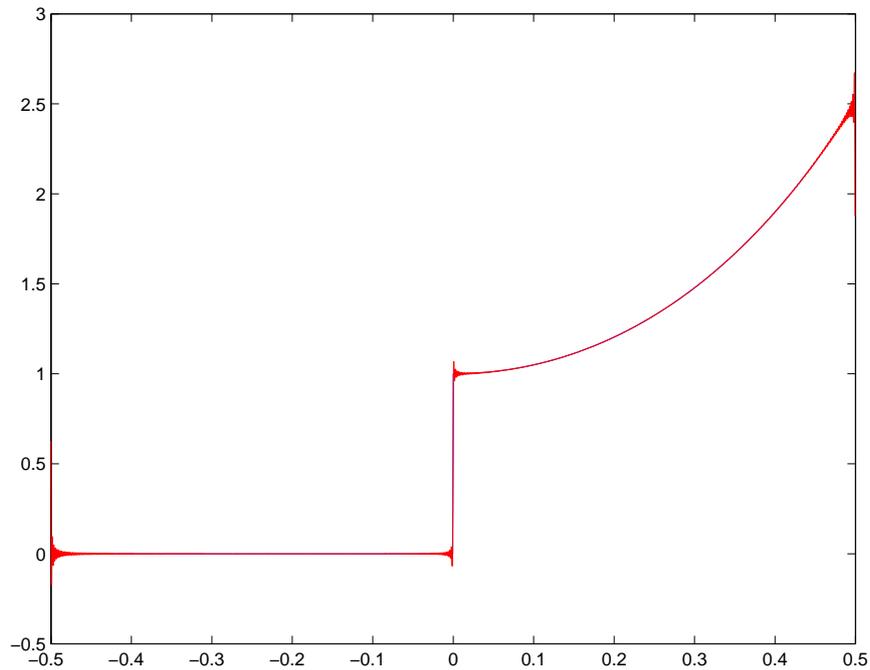


FIGURE 0.2. Le phénomène de Gibbs pour  $\tilde{f}$  (approximation par les sommes de Fourier)

(7) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la fonction  $\omega \mapsto P(\omega)$  est un polynôme trigonométrique :

$$P : \omega \mapsto \sum_{k=0}^N c_k e^{2i\pi k\omega}$$

(il n'y a pas de fréquences correspondant à des  $k < 0$ ). On rappelle que le noyau de Fejér  $F_N$  est défini comme le polynôme trigonométrique

$$\omega \mapsto F_N(\omega) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{2i\pi k\omega}.$$

Affichez le graphe de ce noyau pour des valeurs de  $N = 10, 20, 50$  et comparez-le au graphe du noyau de Dirichlet  $D_N$ , défini, lui, par

$$\omega \mapsto \sum_{k=-N}^N e^{2i\pi k\omega}$$

(utilisez la routine `inspectre` pour tracer sur une même figure les graphes de ces noyaux sur  $[-1/2, 1/2]$ , avec un pas de  $1/2048$ , et imprimez ces graphes, en imprimant chaque fois sur une même figure le graphe de  $K_N$  en plein et celui de  $D_N$  en pointillés, ceci pour  $N = 10, 20, 50$ ).

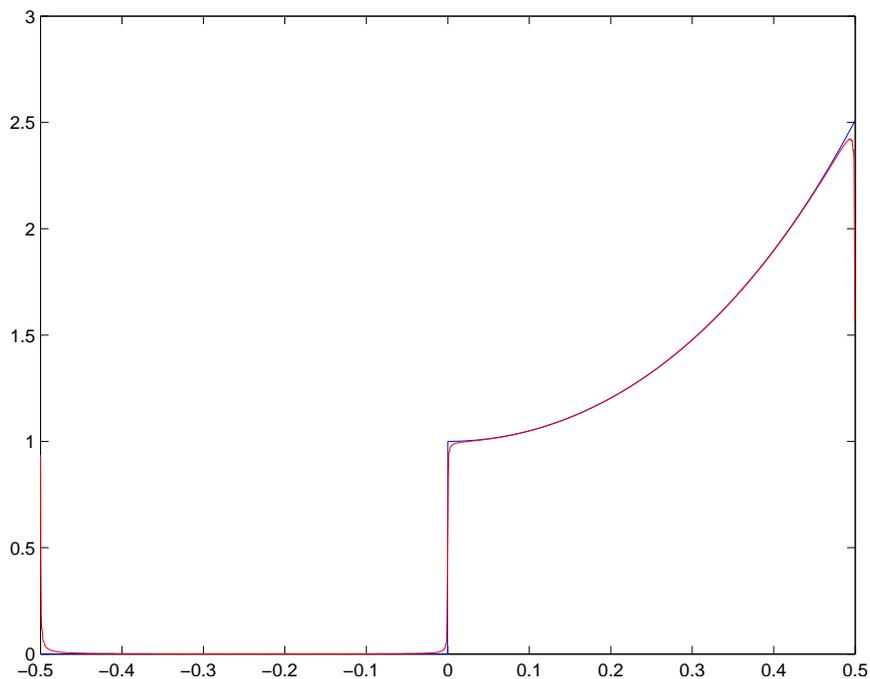


FIGURE 0.3. L'absence de phénomène de Gibbs pour  $\tilde{f}$  (approximation par les sommes de Fejér)

Tout le travail demandé ici a été fait en TP (graphes des noyaux de Fejér). Le noyau de Dirichlet  $D_N$  (échantillonné avec un pas de  $1/(2M)$  sur  $[-1/2, 1/2[$ ) est généré par la routine

```
function [T,D]=noyauDirichlet (M,N) ;
k= (- M) : (-N -1) ;
kk = (-N) : N ;
kkk = (N+1) : (M-1);
Dhat = [zeros(size(k)), ones(size(kk)), zeros(size(kkk))];
size(Dhat)
D = real(ispectre (Dhat',2*pi*M));
T = -1/2 : 1/(2*N) : 1/2 -1/(2*M) ;
```

L'affichage se fait avec `plot(T,D)`. Le noyau de Fejér  $F_M$  (échantillonné avec le même pas de  $1/(2N)$  sur  $[-1/2, 1/2[$ ) est, lui, généré par la routine :

```
function [T,F]=noyauFejer (M,N) ;
k= (- M) : (-N -1) ;
kk = (-N) : N ;
kkk = (N+1) : (M-1);
Fhat = [zeros(size(k)), 1-abs(kk)/N, zeros(size(kkk))];
size(Dhat)
F = real(ispectre (Fhat',2*pi*M));
T = -1/2 : 1/(2*M) : 1/2 -1/(2*M) ;
```

L'affichage se fait encore avec `plot(T,D)`. Les deux noyaux ont été ici construits *via* la donnée de la liste de leurs coefficients de Fourier entre  $-M$  et  $M - 1$ ,  $M$  étant ici grand devant  $N$ . Sur la figure 0.4, on a affiché les graphes demandés ( $M = 1024$ ) correspondant à  $N = 20$  (on ferait de même avec les autres, correspondant à  $N = 10$  et  $N = 50$ ). Le graphe de  $D_{20}$  est en plein, celui de  $F_{20}$  en tirets.

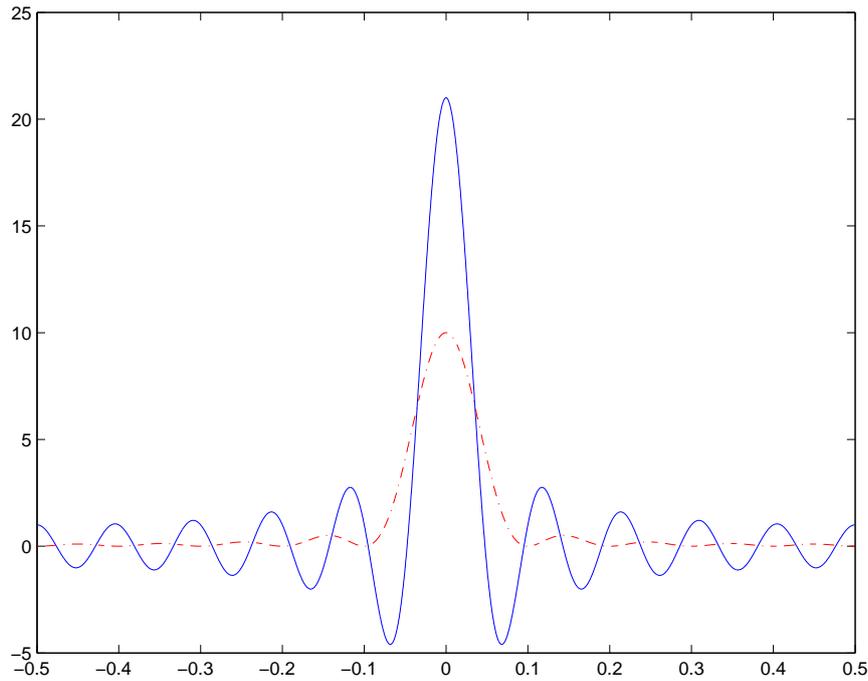


FIGURE 0.4. Les graphes des noyaux de Dirichlet et Fejér ( $N = 20$ )

– Si  $Q$  est le polynôme trigonométrique défini par

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, Q(\omega) = P(\omega) \times e^{-2i\pi N\omega},$$

comparez la convolée 1-périodique<sup>2</sup> des deux fonctions 1-périodiques  $Q$  et  $F_N$  avec le polynôme trigonométrique  $P'/N$ .

Si l'on convole  $Q$  et  $F_N$ , le résultat est la fonction  $2\pi$ -périodique

$$\omega \mapsto \sum_{k=-N}^N c_k(Q)(1 - |k|/N) e^{2i\pi k\omega}$$

2. On rappelle que la convolée 1-périodique de deux fonctions 1-périodiques  $f_1$  et  $f_2$  est définie par

$$(f_1 * f_2)(\omega) := \int_0^1 f_1(\varpi) f_2(\omega - \varpi) d\varpi$$

et que ses coefficients de Fourier s'obtiennent en multipliant terme à terme les coefficients de Fourier de  $f_1$  par ceux de  $f_2$ .

(car Fourier échange la convolution et la multiplication terme-à-terme des suites de coefficients de Fourier). Or

$$Q(\omega) = \sum_{k=0}^N c_k e^{2i\pi(k-N)\omega} = \sum_{k=-N}^0 c_{k+N} e^{2i\pi k\omega}.$$

On a donc  $c_k(Q) = c_{k+N}$  si  $k = -N, \dots, 0$ ,  $c_k(Q) = 0$  sinon. Donc

$$Q * F_N(\omega) = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=-N}^0 c_{k+N} (k+N) e^{2i\pi(k+N)\omega} \right) e^{-2i\pi N\omega} = \frac{P'(\omega)}{2i\pi N} e^{-2i\pi N\omega}.$$

– Dédisez en l'inégalité de Bernstein :

$$\sup_{\mathbb{R}} |P'| \leq 2\pi N \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

On a, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$|Q * F_N(\omega)| = \left| \int_{-1/2}^{1/2} P(\varpi) e^{-2i\pi N\varpi} F_N(\omega - \varpi) d\varpi \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |P| \times \int_{-1/2}^{1/2} F_N(\varpi) d\varpi = \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

En utilisant le résultat établi juste au dessus, on a d'autre part

$$|Q * F_N(\omega)| = \frac{|P'(\omega)|}{2\pi N}.$$

En combinant avec ce qui précède, on obtient bien l'inégalité de Bernstein voulue.

(8) Soit encore  $N \in \mathbb{N}^*$ . On considère une fonction réelle 1-périodique  $f$  de classe  $C^1$ , non identiquement nulle, et dont tous les coefficients de Fourier  $c_k(f)$  sont nuls lorsque  $-N < k < N$ .

- Utilisez la routine `inspectre` pour faire des tests numériques (sur ces exemples) montrant que la fonction  $f$  présente au moins  $2N$  changements de signe (on dit aussi que le graphe de  $f$  présente au moins  $2N$  **zerocrossings**) sur  $[-1/2, 1/2]$ . Générez (avec `inspectre`) et imprimez quelques graphes de telles fonctions  $f$  pour illustrer ce fait (en utilisant la commande `print` sous `MATLAB`) avec des valeurs de  $N$  de plus en plus grandes ( $N = 10, 20, 50$ ).
- Pourquoi le nombre de changements de signe de la fonction  $f$  sur  $[0, 1[$  est-il nécessairement pair ? non nul ? (exploitez pour ce dernier point le fait que  $c_0(f) = 0$ ).

La parité du nombre de changements de signe de  $f$  sur  $[-1/2, 1/2[$  tient au fait que la fonction  $f$  est 1-périodique. Comme l'on a  $c_0(f) = 0$ , la fonction est de moyenne nulle sur  $[-1/2, 1/2[$  et doit donc nécessairement changer de signe : sinon en effet, on aurait  $c_0(f) < 0$  ou  $c_0(f) > 0$  car l'intégrale d'une fonction continue strictement positive (resp. strictement négative) sur  $[-1/2, 1/2[$  est strictement positive (resp. strictement négative).

- Soient deux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  telles que  $-1/2 \leq \omega_1 < \omega_2 < 1/2$ . Déterminez deux réels  $a_{\omega_1, \omega_2}$  et  $\varphi_{\omega_1, \omega_2}$  de manière à ce que le signal analogique

$$\omega \longmapsto \cos(2\pi\omega - \varphi_{\omega_1, \omega_2}) - a_{\omega_1, \omega_2}$$

présente exactement deux changements de signe sur  $[-1/2, 1/2[$  (précisément en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) (aidez vous pour cela du graphe de la fonction de référence  $\omega \mapsto \cos(2\pi\omega)$  que l'on translatera horizontalement, puis verticalement, pour l'« ajuster » exactement au problème).

On écrit la fonction demandée sous la forme

$$\omega \mapsto \cos(2\pi(\omega - \psi_{\omega_1, \omega_2}) - a_{\omega_1, \omega_2}).$$

En choisissant  $\psi_{\omega_1, \omega_2} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ , soit  $\varphi_{\omega_1, \omega_2} = \pi(\omega_1 + \omega_2)$ , on ajuste le lobe de la fonction cosinus de manière à ce que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  se trouvent être symétriques par rapport à l'axe de symétrie de cette nouvelle fonction translaturée. Il suffit ensuite de faire en sorte que la fonction s'annule en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ce qui revient à poser

$$a_{\omega_1, \omega_2} = \cos(\pi(\omega_1 - \omega_2)).$$

La fonction

$$\omega \mapsto \cos\left(2\pi\left(\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\right) - \cos(\pi(\omega_1 - \omega_2))$$

présente deux changements de signe sur  $[-1/2, 1/2[$ , respectivement en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

– Soit une liste ordonnée de fréquences

$$-1/2 \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \dots < \omega_{2M-1} < \omega_{2M} < 1/2.$$

Rédigez un code `zerocrossings.m`

>> `C = zerocrossings(L)` ;

qui, étant donnée la liste ainsi ordonnée `L` de ces  $2M$  fréquences, renvoie la liste `C` des coefficients de Fourier<sup>3</sup> entre  $-M$  et  $M$  d'un polynôme trigonométrique de degré exactement  $2M$ , à valeurs réelles :

$$P_L : \omega \mapsto \sum_{k=-M}^M c_{L,k} e^{2i\pi k\omega}$$

présentant exactement  $2M$  changements de signe (`zerocrossings`) sur  $[-1/2, 1/2[$  ; utilisez pour cela la routine `spectre`. Testez ce code et imprimez le ; vous m'enverrez aussi le fichier source.

Le polynôme trigonométrique qui fait l'affaire est le polynôme trigonométrique

$$P_L : \omega \mapsto \prod_{j=1}^M \left( \cos\left(2\pi\left(\omega - \frac{\omega_{2j-1} + \omega_{2j}}{2}\right)\right) - \cos(\pi(\omega_{2j} - \omega_{2j-1})) \right).$$

Il s'agit bien d'une fonction de la forme voulue et le nombre de changements de signe est exactement  $2M$ , ces changements de signe intervenant exactement aux points  $\omega_1, \dots, \omega_{2M}$ . Le code demandé est ici :

function `C = zerocrossings(L)` ;

`M = floor(length(L)/2)` ;

`omega = -1/2 : 1/(2*(M+1)) : 1/2-1/(2*(M+1))` ;

`P = ones(size(omega))` ;

3. Il fallait lire ici entre  $-M$  et  $M$  et non entre  $-(2M+1)$  et  $2M$ , j'ai rectifié.

```

for j=1:M
    a = (L(2*j-1) + L(2*j))/2 ;
    b = pi*(L(2*j-1) - L(2*j));
    P = P.* (cos (2*pi*(omega-a)) - cos(b));
    CC = real(spectre (P',1/2)) ;
    C = (CC(2:2*(M+1)))';
end;

```

– Soit  $f$  comme dans l'en-tête de cette question, ayant exactement  $2M$  changements de signe sur  $[-1/2, 1/2[$ , avec  $1 \leq M \leq N - 1$ , les  $2M$  **zerocrossings** de  $f$  étant les points d'une liste ordonnée (en croissant)  $L$ . Pourquoi a-t'on

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(\omega) P_L(\omega) d\omega = 0.$$

Montrez que la fonction  $f P_L$  garde un signe constant sur  $[-1/2, 1/2[$ , et que ceci est en contradiction avec  $f \not\equiv 0$ . Déduez en que le graphe de  $f$  présente au moins  $2N$  **zerocrossings** sur  $[-1/2, 1/2[$ .

D'après la formule de Plancherel, on a, puisque les fonctions  $f$  et  $P_L$  sont réelles :

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(\omega) P_L(\omega) d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \overline{c_k(P_L)} = 0$$

(les coefficients de Fourier de  $f$  sont nuls si  $|k| < N$  tandis que ceux de  $P_L$  sont, eux, nuls lorsque  $|k| > M$  avec  $M \leq N - 1$ , donc nuls lorsque  $|k| \geq N - 1$ ). Comme les  $2M$  **zerocrossings** de  $f$  sont, par construction même de  $P_L$ , exactement les **zerocrossings** de  $P_L$ , la fonction  $f P_L$  ne change pas de signe sur  $[-1/2, 1/2[$  (le signe de  $f$  étant partout corrigé par celui de la fonction  $P_L$  par laquelle on multiplie  $f$ ). La fonction  $f P_L$  doit rester toujours positive ou nulle, ou toujours négative ou nulle, sur tout l'intervalle  $[-1/2, 1/2[$ . Si

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(\omega) P_L(\omega) d\omega = 0,$$

on doit donc avoir, comme  $f P_L$  est continue,  $f P_L \equiv 0$ . Comme  $P_L$  a exactement  $2M$  **zerocrossings**,  $f$  est nécessairement identiquement nulle, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. On en déduit ainsi (par l'absurde) que le nombre de **zerocrossings** de  $f$  sur  $[-1/2, 1/2[$  ne saurait être inférieur ou égal à  $2(N - 1)$ , donc est au moins égal à  $2N$ .

(9) On reprend dans cette question<sup>4</sup> la fonction  $f$  de la question 5. On suppose que l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y = f$$

admet sur  $\mathbb{R}$  une solution de classe  $C^2$ .

---

4. Qui s'inspire de l'exercice 1 traité en TP dans la feuille de TP 3.

– Que vaut  $c_0(y)$  ?

Comme

$$c_0(y'') = \int_{-1/2}^{1/2} y''(\omega) d\omega = y'(1/2) - y'(-1/2) = 0$$

car  $y$  est supposée 1-périodique de classe  $C^2$ , on a

$$c_0(y'' + y) = c_0(y) = c_0(f) = \int_{1/2}^{1/2} \cosh(\pi\omega) d\omega = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{\pi}.$$

– Calculez (à la main) les coefficients  $c_k(y)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , en fonction des coefficients  $c_k(f)$ ; implémentez le calcul numériquement pour les valeurs  $k = -1024 : 1023$ ;

Par parties, on voit que l'on a entre les coefficients de Fourier de  $y$  et ceux de  $y''$  la relation :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(y'') = -4\pi^2 k^2 c_k(y).$$

Compte tenu des calculs des  $c_k(f)$  pour  $k \neq 0$  faits à la question 5, on a

$$c_k(y) = \frac{(-1)^k (e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + 4k^2)(1 - 4\pi^2 k^2)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La vérification numérique demandée a (en fait) déjà été pratiquement effectuée (dans le sens contraire) à la question 5.

```
>> k = -1024 : 1023;
>> a = exp(pi/2) - exp(-pi/2);
>> CC = a*(-1).^k ./ (pi*(1+4*k.^2).*(1-4*pi^2*k.^2));
>> y = real(ispectre(CC', pi*2048));
>> t = -1/2 : 1/2048 : 1/2 - 1/2048;
>> plot(t, y);
```

On obtient ainsi le graphe de la fonction  $y$  sur  $[-1/2, 1/2[$ . Voir la figure 0.5.

– Pourquoi la série de Fourier de  $y$  converge-t-elle normalement sur  $\mathbb{R}$  ?

Comme  $c_k(y) = O(1/k^4)$  au voisinage de  $\pm\infty$  d'après les formules établies précédemment, on a  $(c_k(y))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$  et la série de Fourier

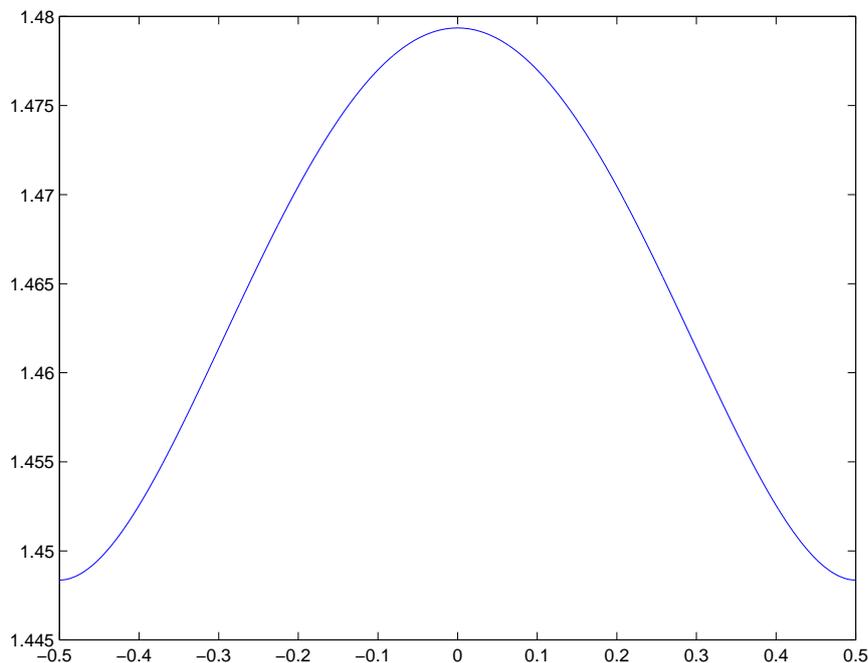
$$S[y] : \omega \mapsto \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k(y) e^{2i\pi k\omega}$$

est donc normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .

– Quelle est la série de Fourier de  $y'$  ? Montrez que cette série de Fourier converge aussi normalement;

La série de Fourier de  $y'$  est

$$S[y'] : \omega \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2i\pi k c_k(y) e^{2i\pi k\omega}$$

FIGURE 0.5. Le graphe de la fonction  $y$  sur  $[-1/2, 1/2[$ 

puisque (par exemple par intégration par parties), on sait que l'on a  $c_k(y') = 2i\pi k c_k(y)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Cette série est aussi normalement convergente car

$$|c_k(y')| = 2\pi|k| |c_k(y)| = O(1/|k|^3)$$

lorsque  $|k|$  tend vers l'infini. La suite  $(c_k(y'))_{k \in \mathbb{Z}}$  est donc bien dans  $l^1(\mathbb{Z})$ .

- Vérifiez que la fonction  $y$  ainsi construite est bien de classe  $C^2$  ;

Comme  $c_k(y) = O(1/k^4)$  lorsque  $|k|$  tend vers l'infini, le théorème de dérivation terme-à-terme des séries fonctions d'un paramètre (cf. le cours d'Analyse 3 en S4<sup>5</sup>) s'applique ici (deux fois) pour justifier que  $y$  est bien de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et que ses dérivées sont :

$$y' \quad : \quad \omega \longmapsto \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k(y) (2i\pi k) e^{2i\pi k \omega}$$

$$y'' \quad : \quad \omega \longmapsto \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k(y) (2i\pi k)^2 e^{2i\pi k \omega} .$$

- Affichez le graphe de la fonction  $y$  sur  $[-1/2, 1/2[$  (en prenant comme pas 1/2048) en utilisant la routine `ispectre`. Imprimez le graphe.

---

5. Théorème 3.3 dans le polycopié de ce cours en ligne : <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mat401.pdf>

Voir la figure 0.5.

**III.** Cette dernière partie est directement inspirée de ce qui a été fait dans la feuille de TP 4. L'exercice 3 de l'examen de session 2 (2011-2012) lui est aussi relié. Dans le traitement digital de l'information, on appelle filtre ARMA<sup>6</sup> stable toute application  $\mathcal{L}$  de  $l^1(\mathbb{Z})$  dans  $l^1(\mathbb{Z})$  telle qu'il existe deux listes  $A = [1, a_1, \dots, a_N]$  et  $B = [b_0, \dots, b_M]$  (avec  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $b_l \in \mathbb{C}$  et  $b_0 \neq 0$ ) de manière à ce que la relation entre entrée  $\mathbf{e} = (e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  et sortie  $\mathcal{L}[\mathbf{e}] = \mathbf{s} = (s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  soit régie par le jeu de relations

$$s(k) + \sum_{n=1}^N a_n s(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m e(k-m) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La réponse impulsionnelle du filtre  $\mathcal{L}$  est par définition la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  correspondant à la sortie lorsque l'entrée est l'impulsion à l'origine, c'est-à-dire la suite définie par  $e_0(0) = 1$  et  $e_0(k) = 0$  si  $k \neq 0$ . Lorsque  $A = [1]$ , le filtre sera dit simplement MA<sup>7</sup>.

(10) Si la fraction rationnelle

$$R(z) := \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

n'a aucun pôle sur le cercle unité, exprimez à partir de cette fraction rationnelle la fonction 1-périodique

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2i\pi k \omega}.$$

Ceci a été fait en TP (TP 4). La relation entrées/sorties au niveau des transformées de Fourier s'exprime ainsi :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{s}(\omega) \times \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-2in\pi\omega}\right) = \widehat{e}(\omega) \times \left(\sum_{m=0}^M b_m e^{-2i\pi m\omega}\right).$$

Si  $e_0$  est la suite définie par  $e_0(0) = 1$  et  $e_0(k) = 0$  si  $k \neq 0$  (impulsion à l'origine), on a  $\widehat{e}_0 \equiv 1$ . On a donc

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2i\pi k \omega} = R(e^{2i\pi\omega}) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

(11) On suppose de plus que la fraction rationnelle  $R$  n'a que des pôles simples, tous hors du cercle unité. Calculez en fonction des coefficients  $a_n$  et  $b_m$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $m = 0, \dots, M$ , et des valeurs des pôles  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  de la fraction rationnelle  $R$  dans  $\mathbb{C}$ , la réponse impulsionnelle  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  du filtre ARMA  $\mathcal{L}$  (vous serez amenés à traiter différemment le cas des pôles  $\alpha_j$  intérieurs au disque unité ouvert et celui des pôles extérieurs au disque unité fermé, expliquez pourquoi et comment).

La fraction rationnelle  $R(z) = P(z)/Q(z)$  (écrite ici sous forme réduite) se décompose en éléments simples. Si l'on note  $[P : Q]$  le quotient de la

6. « Auto-Regressive with Moving Average ».

7. « with Moving Average »

division euclidienne de  $P$  par  $Q$  et  $S$  le reste dans cette même division euclidienne,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  les pôles simples de  $R$  situés à l'intérieur du disque unité ouvert,  $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_q$  ceux situés à l'extérieur du disque unité fermé (il n'y a pas de pôle sur le cercle unité par hypothèses), cette décomposition en éléments simples s'écrit :

$$R(z) = [P : Q](z) + \sum_{j=1}^r \frac{\beta_j}{z - \alpha_j} + \sum_{j=r+1}^q \frac{\beta_j}{z - \alpha_j},$$

avec

$$[P : Q](z) = u_0 + \dots + u_\mu z^\mu, \quad u_0, \dots, u_\mu \in \mathbb{C},$$

et

$$\beta_j := \frac{S(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}, \quad j = 1, \dots, q.$$

Pour  $j = 1, \dots, r$ , on peut développer  $1/(z - \alpha_j)$  (comme une série géométrique absolument convergente) lorsque  $|z| = 1$  en

$$\frac{1}{z - \alpha_j} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \alpha_j/z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_j^{k-1}}{z^k}.$$

Pour  $j = r + 1, \dots, q$ , on peut développer en revanche  $1/(z - \alpha_j)$  (toujours comme une série géométrique absolument convergente, ce lorsque  $|z| = 1$ ) en

$$\frac{1}{z - \alpha_j} = -\frac{1}{1 - z/\alpha_j} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\alpha_j^k}.$$

On a donc le développement suivant pour  $\hat{h} = [R(z)]_{z=e^{2i\pi\omega}}$  :

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \sum_{l=0}^{\mu} u_l e^{2il\pi\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^{k-1} \right) e^{-2i\pi k\omega} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=r+1}^q \frac{\beta_j}{\alpha_j^k} \right) e^{2i\pi k\omega} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2i\pi k\omega}. \end{aligned}$$

On obtient la valeur de  $h_k$  en identifiant les coefficients de  $\omega \mapsto e^{-2i\pi k\omega}$  dans ces deux développements.

- (12) *Le filtre ARMA  $\mathcal{L}$  est dit causal si sa réponse impulsionnelle est telle que  $h_k = 0$  pour tout  $k < 0$ . Sous quelles hypothèses (portant sur la fraction rationnelle  $R$ , supposée simplement avoir tous ces pôles simples et hors du cercle unité) en est-il ainsi ? Vérifiez alors que si  $e(k) = 0$  pour  $k < 0$ , en en est de même pour  $s(k)$ .*

Pour que le filtre soit causal, il faut d'une part qu'il n'y ait aucun pôle de  $R$  hors du disque unité fermé (car un tel pôle contribue en effet à des termes  $\beta_j/\alpha_j^{1-k} \times e^{-2i\pi k\omega}$  avec  $k < 0$ ), d'autre part que les coefficients  $u_1, \dots, u_\mu$  de  $[P : Q]$  soit nuls. Le filtre est donc causal si et seulement tous les pôles de  $R$  sont dans le disque unité ouvert et  $\deg P \leq \deg Q$ .

Comme  $h$  est la réponse impulsionnelle à l'impulsion  $e_0$  et que l'action du filtre  $\mathcal{L}$  est linéaire et invariante par translation dans le temps, on a, pour toute entrée  $e = (e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  :

$$s(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h(l) e(k-l).$$

Si  $h(l) = 0$  pour  $l < 0$  ( $\mathcal{L}$  est causal), on a donc

$$s(k) = \sum_{l \geq 0} h_l e(k-l).$$

Il résulte de cette relation que si  $e(k) = 0$  pour  $k < 0$ , on a aussi  $s(k) = 0$  pour  $k < 0$ . On peut même ajouter que le calcul de  $s(k)$  à l'instant  $k$  ne fait intervenir que le passé-présent de l'entrée à cet instant, c'est-à-dire la seule connaissance des  $e(k-l)$  pour  $l \geq 0$ .

- (13) À l'aide de la routine `MATLAB fir1`<sup>8</sup>, permettant le « design », via la construction de suites de nombres complexes  $A = [1]$  et  $B = [b_0, \dots, b_M]$ , de filtres MA permettant le filtrage des fréquences dans des bandes passantes ('bandpass'), réalisez des filtres MA avec  $M = 20$  permettant de filtrer (en l'éliminant) l'une (et chaque fois une seule) des fréquences apparaissant de manière constante dans la description fréquentielle du signal `signalQ3` étudié à la question 3. Implémentez l'opération de filtrage sur le signal `signalQ3` en utilisant sous `MATLAB` la routine `filter` dont vous étudierez le `help`. Imprimez les spectrogrammes des signaux filtrés à l'appui de vos constructions.

La gamme des fréquences positives [0 Hz, 200 Hz] du signal `signalQ3` est normalisée comme [0, 1]. Pour couper une fréquence se trouvant localisée autour d'une valeur  $\omega_0$  (en Hertz), on choisit un encadrement  $[W1, W2]$  assez précis du nombre  $\omega_0/200 \in [0, 1]$ . Le *design* du filtre appelé à couper les fréquences voisines de  $\omega_0$  s'effectue alors suivant la routine :

```
>> B = fir1(20, [W1, W2], 'stop');
```

Il s'agit d'un filtre MA (on prend  $a_0 = 1$  et tous les  $a_n$  nuls pour  $n > 0$ ). Le filtrage s'effectue grâce à la routine `filter` :

```
>> signalQ3filtre = filter(B, 1, signalQ3);
```

Pour effectuer un test, on a par exemple filtré la fréquence fixe approximativement égale à 107 Hz en prenant  $[W1, W2] = [.4, .6]$  et en utilisant la liste des coefficients `B` correspondant au filtre MA répondant à cet objectif. On a représenté le spectrogramme du signal filtré sur la figure 0.6 (comparez avec le spectrogramme du signal originel sur la figure 0.1).

---

8. Étudiez le `help` de cette routine.

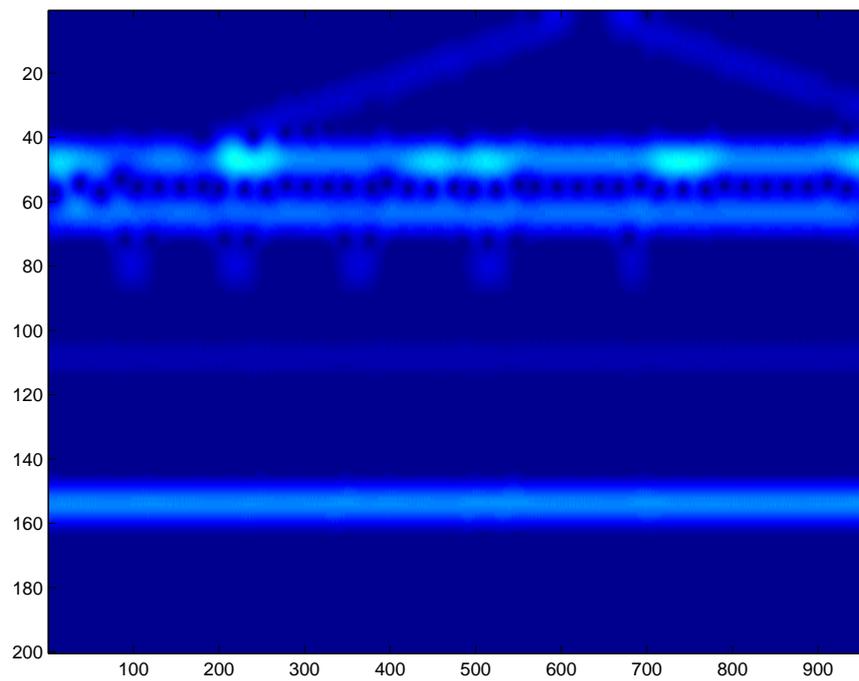


FIGURE 0.6. Effet du filtrage de la fréquence à 107 Hz de `signalQ3`