

Devoir surveillé du 29/03/2017, 13H30-15H, Amphi A, bâtiment A29

Un aide-mémoire d'une page est autorisé.

**Exercice 1.**

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

(1) Soit  $(x_n)_n$  une suite dans  $E$  telle que  $\sum_n d(x_{n+1}, x_n) < \infty$ . Montrer que  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy.

(2) Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $E$ . Montrer qu'il existe une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  telle que  $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}$ .

(3) Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $E$  telle qu'il existe une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  convergeant vers un point  $l \in E$ . Montrer que la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $l$ .

(4) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a)  $E$  est complet.
- (b) Toute suite  $(x_n)_n$  telle que  $\sum_n d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$  est convergente.
- (c) Toute suite  $(x_n)_n$  telle que pour tout  $n$ ,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$  est convergente.

**Exercice 2.** Soit  $\phi \in C^0([0, 1])$  une fonction fixée. On introduit l'espace vectoriel  $E = C^0([0, 1])$  muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Considérons la forme linéaire  $T : E \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$T(f) = \int_0^1 \phi(x) f(x) dx.$$

- (a) Calculer la norme  $\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |Tf|$  de l'application.
- (b) Présenter les cas où: a) le sup ci-dessus est atteint; b) le sup ci-dessus n'est pas atteint.
- (c) Donner une condition suffisante (et, de préférence, assez générale) pour que le sup de la définition de  $\|T\|$  soit atteint.

**Exercice 3.** Soit  $X$  un espace de Banach, et  $T \in \mathcal{L}(X)$  tel que  $\|T\| < 1$ . Le but de cet exercice est de construire l'opérateur inverse à  $(I - T)$ .

- (a) Pour tout  $x \in X$ , posons

$$Sx = \sum_{k=0}^{\infty} T^k x.$$

Montrer que cette série converge dans le sens de la convergence en norme de l'espace  $X$ .

- (b) Vérifier que  $S(I - T) = (I - T)S = I$  et donc  $S = (I - T)^{-1}$ .
- (c) Démontrer que  $\|(I - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$ .
- (d) Donner un exemple d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\|T\| = 1$ , pour lequel la construction des questions précédentes ne s'applique pas.