Université de Bordeaux
Mathématiques

Algèbre 1 – Licence 2
Année 2015–2016

Corrigé du DM n° 1

Barême: Ex 1 sur 6, Ex 2 sur 2, Ex 3 sur 8, Ex 4 sur 4

Exercice 1 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire suivant d'inconnues x, y, z (on discutera les solutions en fonction du paramètre m).

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx + y + z & = & 1 \\ x + my + z & = & m \\ x + y + mz & = & m^2 \end{array}\right.$$

Solution Exercice 1 – Notons (S) le système linéaire ci-dessus, et $\mathcal{S}$ son ensemble de solutions. On applique la méthode du pivot de Gauss:

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \left\{\begin{array}{rcll} x + y + mz & = & m^2 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x + my + z & = & m & \\ mx + y + z & = & 1 & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} x + y + mz & = & m^2 & \\ (m-1)y + (1-m)z & = & m - m^2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-m)y + (1-m^2)z & = & 1 - m^3 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y + mz & = & m^2 \\ (m-1)(y-z) & = & -m(m-1) \\ (1-m)(y + (1+m)z) & = & (1-m)(1+m+m^2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On souhaite simplifier les deux dernières équations par $m-1$ donc on doit distinguer les cas $m = 1$, $m \neq 1$.

Si $m = 1$: on obtient

$$(S) \iff x + y + z = 1$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{(x, y, 1 - x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(0, 0, 1) + x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.
\end{aligned}$$

Si $m \neq 1$: alors on peut diviser par $m-1$ les deux dernières équations.

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & m^2 \\ y-z & = & -m \\ y+(1+m)z & = & 1+m+m^2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & m^2 \\ y-z & = & -m \\ (2+m)z & = & 1+2m+m^2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Pour calculer z il faut diviser par $m+2$ donc nouvelle discussion suivant que $m=-2$ ou pas.

Si $m=-2$:

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z & = & 4 \\ y-z & = & 2 \\ 0.z & = & 1 \end{array}\right.$$

La dernière équation donne $0=1$ ce qui n'est pas possible donc $\mathcal{S}=\emptyset$.

Finalement, si $m \neq -2$ et $m \neq 1$, on obtient

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & m^2 \\ y-z & = & -m \\ z & = & \frac{1+2m+m^2}{m+2} = \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & m^2-y-mz = -\frac{m+1}{m+2} \\ y & = & -m+z = \frac{1}{m+2} \\ z & = & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array}\right.$$

et

$$\mathcal{S} = \Big\{(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2})\Big\}.$$

On résume le résultat trouvé pour l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système (S):

Si $m=1$: $\quad \mathcal{S} = \{(x,y,1-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Si $m=-2$: $\quad \mathcal{S} = \emptyset$

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$: $\quad \mathcal{S} = \Big\{\Big(-\Big(\frac{m+1}{m+2}\Big), \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2}\Big)\Big\}.$

Exercice 2 – Dans $\mathbb{C}^3$, le vecteur $u = (1, i, 1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 2, -i)$, $e_2 = (1, i, 1+i)$ et $e_3 = (1, -1, 2i)$?

Solution Exercice 2 – On cherche s'il existe des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = u$$

ce qui conduit au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 \\ 2\lambda_1 + i\lambda_2 - \lambda_3 & = & i \\ -i\lambda_1 + (1+i)\lambda_2 + 2i\lambda_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

On résoud ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss et on trouve qu'il n'a pas de solutions (bien sûr, il faut détailler le calcul). Donc la réponse est: non, u n'est pas combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, e_3.

Exercice 3 – Dans $\mathbb{R}^4$, on définit:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$F = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)) \quad G = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, -1))$$

Exprimez chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants sous la forme $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$:

$$E \cap F, \quad F \cap G, \quad E \cap G, \quad E + F, \quad E + G, \quad F + G.$$

Solution Exercice 3 –

$\mathbf{E} \cap \mathbf{F}$: La forme générale d'un vecteur de F est $\lambda_1(1, -1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 1, 1) = (\lambda_1, -\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Ce vecteur appartient à E si et seulement si $\lambda_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_2 + \lambda_2 = 0$, soit $3\lambda_2 = 0$ ce qui équivaut à $\lambda_2 = 0$. Donc

$$E \cap F = \{\lambda_1(1, -1, 0, 0) \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0)).$$

$\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$: Un vecteur de $F \cap G$ est à la fois de la forme $\lambda_1(1, -1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 1, 1)$ et de la forme $\mu(1, -1, 1, -1)$. On cherche donc toutes les solutions $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation

$$\lambda_1(1, -1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 1, 1) = \mu(1, -1, 1, -1).$$

Celle-ci conduit au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \mu \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = & -\mu \\ \lambda_2 & = & \mu \\ \lambda_2 & = & -\mu \end{array}\right.$$

Il est facile de voir que ce système linéaire a pour seule solution $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = (0, 0, 0)$ ce qui montre que $F \cap G = \{0\}$.

$\mathbf{E} \cap \mathbf{G}$: On remarque que $(1, -1, 1, -1) \in E$ donc $E \cap G = G$.

E + F: On met d'abord E sous la forme 'Vect'. Pour cela, on traite E comme un ensemble de solutions de système linéaire. Comme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ si et seulement si $x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$, on a

$$\begin{aligned} E &= \{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,0,-1) + x_3(0,0,1,-1) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)). \end{aligned}$$

Les vecteurs de $E + F$ sont ceux de la forme $u + v$ avec $u \in E$ et $v \in F$. En écrivant u sous la forme $u = x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,0,-1) + x_3(0,0,1,-1)$ avec $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et v sous la forme $v = \lambda_1(1,-1,0,0) + \lambda_2(0,1,1,1)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$u+v = x_1(1,0,0,-1)+x_2(0,1,0,-1)+x_3(0,0,1,-1)+\lambda_1(1,-1,0,0)+\lambda_2(0,1,1,1)$$

et on voit que

$$E + F = \mathrm{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,-1,0,0),(0,1,1,1)).$$

Là le job est fait, on a répondu à la question. Pour aller plus loin, on peut se rendre compte que ces vecteurs engendrent $\mathbb{R}^4$ et donc que $E + F = \mathbb{R}^4$.

Voilà une autre solution plus expéditive, qui exploite le résultat vu en cours qui dit que "si $U \subset V$ alors $U = V$ si et seulement si $\dim(U) = \dim(V)$".

On a les inclusions $E \subset E+F \subset \mathbb{R}^4$. On sait que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ et que $\dim(E) = 3$ (cette dernière affirmation mérite une justification: par exemple il est facile de voir que les trois vecteurs $(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)$ forment une base de E). Donc $3 \leq \dim(E + F) \leq 4$. Mais $E + F \neq E$ car le vecteur $(0,1,1,1)$ est dans F mais pas dans E donc on ne peut pas avoir $\dim(E + F) = \dim(E)$. C'est donc que $\dim(E + F) = 4$ soit que $E + F = \mathbb{R}^4$.

E + G: On a $G \subset E$ donc $E + G = E$.

F + G: Par le même raisonnement que pour $E + F$,

$$F + G = \mathrm{Vect}((1,-1,0,0),(0,1,1,1),(1,-1,1,-1)).$$

Exercice 4 – Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles. Soit

$$F = \{u \in E \mid \text{ pour tout } n \geq 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}.$$

1) Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E.
2) Déterminez deux valeurs de a non nulles pour lesquelles la suite de terme général a^n appartient à F.

Solution Exercice 4 –

1) On vérifie les trois propriétés requises:

(i) F est non vide: en effet la suite dont tous les termes sont nuls vérifie bien la condition "pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$" car $0 = 0 + 0$.

(ii) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ deux éléments de F, montrons que $w = u + v$ appartient à F. On a

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} + v_{n+2} = u_{n+1} + u_n + v_{n+1} + v_n \\ &= (u_{n+1} + v_{n+1}) + (u_n + v_n) = w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

donc $w \in F$.

(iii) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $w = \lambda u \in F$. On a

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + u_n) \\ &= \lambda u_{n+1} + \lambda u_n = w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

donc $w \in F$.

2) Posons $u_n = a^n$ avec $a \neq 0$. La condition $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ équivaut à $a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$ soit $a^n(a^2 - a - 1) = 0$, ou encore $a^2 - a - 1 = 0$ (car $a \neq 0$). Le discriminant de cette équation de degré 2 est 5 qui est positif donc elle a deux solutions réelles qui sont $a_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ et $a_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.