Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Algèbre 1

Devoir surveillé n° 2

23 avril 2015, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Calculez l'inverse, s'il existe, de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A si $a = b = c$?
2. Quel est le rang de A si a, b, c sont deux à deux distincts ?
3. Quel est le rang de A si $a = b$ et $b \neq c$?

Exercice 3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = 3I_3 + N$.

1. Calculez N^2, N^3, puis N^p pour tout $p \geq 4$.
2. En déduire M^p pour tout $p \geq 2$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).
3. On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$, telles que $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$, et vérifiant pour tout $n \geq 0$ les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$$

Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Calculez X_1, puis X_2.

b) Montrez que, pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = MX_n$, puis que, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = M^n X_0.$$

c) Déduire de la question 2. les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA$ pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le but de cet exercice est de montrer qu'alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_2$. On note

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez AE_{11} et $E_{11}A$ puis en déduire que $b = c = 0$.
2. Calculez AE_{12} et $E_{12}A$ puis en déduire que $a = d$.