université de BORDEAUX	**Année universitaire 2016-2017** SEMESTRE 2 SESSION 1 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques/Informatique **Code UE : 4TPM201U** **Épreuve : Algèbre linéaire 1** 15 mai 2017 : (durée : 3h) *Documents interdits* Responsables de l'épreuves : C. Bachoc et R. Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

L'épreuve se compose de quatre exercices indépendants.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.

1. Déterminer le noyau et le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Soit a un réel fixé. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

ainsi que les vecteurs

$$\vec{u}_1 = (1,1,1)\ ,\ \vec{u}_2 = (1,-1,0)\ \text{ et } \vec{u}_3 = (1,0,-1).$$

Enfin, on note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à M.

(a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer les images par f de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, et $\vec{u}_3$ et en déduire la matrice N de f dans la base $\mathscr{B}$.

(c) On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ et calculer son inverse.

(d) Quelle relation y a-t-il entre N, P, P^{-1} et M ?

(e) Déterminer, en fonction de a, la dimension du noyau de f.

Exercice 2.

Soit A une matrice carrée de taille 3 triangulaire supérieure, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$.

1. Montrez que si a, d ou f est nul, le rang de A est strictement inférieur à 3.
2. Montrez qu'inversement, si a, d et f sont non nuls, alors A est inversible.
3. Dans cette question, on suppose que $a = d = f = 1$. Calculez l'inverse de A.
4. Donnez deux matrices A_1 et D telles que $A = A_1 D$, où A_1 est triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux égaux à 1, et D est diagonale.
5. Lorsque $adf \neq 0$, calculez l'inverse de A en vous aidant des deux questions précédentes.

Exercice 3. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f^2 = 0$, c'est-à-dire qu'on a la propriété :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n,\ f(f(\vec{u})) = 0.$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. En utilisant le théorème du rang, montrer que $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$ et que $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$.
3. On suppose désormais que l'application f n'est pas identiquement nulle, ou autrement dit que $\operatorname{Ker} f \neq \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$.
   (b) Soit $\vec{u} \notin \operatorname{Ker} f$. Montrer qu'il existe $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$ tel que la famille $\mathscr{B} = (f(\vec{u}), \vec{v}, \vec{u})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ précédente ?

Exercice 4.

1. Soit $a = 138$, $b = 102$, $c = 110$. On note $d = \operatorname{pgcd}(a,b)$ et $d' = \operatorname{pgcd}(d,c)$.
   (a) Appliquez l'algorithme d'Euclide étendu à a et b pour calculer d ainsi qu'une relation de Bézout entre a et b.
   (b) Faites de même avec d et c.
   (c) En déduire des entiers u, v, w tels que $d' = au + bv + cw$.
   (d) Donnez la liste des diviseurs de a, b et c, puis vérifier que leur plus grand diviseur commun est égal à d'.
2. Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls quelconques. On note $D = \operatorname{pgcd}(a,b,c)$ leur plus grand diviseur commun. On note $d = \operatorname{pgcd}(a,b)$ et $d' = \operatorname{pgcd}(d,c)$.
   (a) Montrez que D divise d, et en déduire que $D \leq d'$.
   (b) Montrez que $D = d'$.
   (c) Déduire de ce qui précède qu'il existe des entiers u, v, w tels que

$$D = au + bv + cw.$$