N1MA4M11 Algèbre 3

Examen du 15 mai 2013. Durée 3h, documents interdits.

Exercice 1

Dans cet exercice, vous pouvez appliquer les résultats du cours sans démonstration mais vous devez fournir un minimum d'explications.

Soit σ, τ les éléments du groupe de permutations S_7 définis par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposez σ et τ en produit de cycles à supports disjoints.
2. En déduire l'ordre de σ et de τ.
3. Les permutations σ et τ sont-elles conjuguées dans S_7 ?
4. Calculez $\tau\sigma^{-1}$, puis sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
5. En déduire l'ordre de $\tau\sigma^{-1}$ ainsi que sa signature.

Exercice 2

On note $S(A)$ le groupe des permutations d'un ensemble A. Si $\sigma \in S(A)$, $\mathrm{Sup}(\sigma)$ désigne l'ensemble des $x \in A$ tels que $\sigma(x) \neq x$. Si $A = \{1, \ldots, n\}$, on note $S(A) = S_n$. Si $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on introduit

$$H_I := \{\sigma \in S_n \;:\; \mathrm{Sup}(\sigma) \subset I\}.$$

1. Montrez que H_I est un sous-groupe de S_n.
2. Soit I et J deux parties de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $I \cap J = \emptyset$.
   (a) Montrez que $H_I \cap H_J = \{\mathrm{Id}\}$, et que tout élément de H_I commute avec tout élément de H_J (i.e. si $\sigma \in H_I$ et $\tau \in H_J$ alors $\sigma\tau = \tau\sigma$).
   (b) En déduire que le sous-groupe de S_n engendré par $H_I \cup H_J$ est égal à $\{\sigma\tau \;:\; \sigma \in H_I,\ \tau \in H_J\}$ et qu'il est d'ordre $|H_I||H_J|$. On note ce sous-groupe $H_I H_J$.
   (c) Montrez que $H_I H_J$ est isomorphe au produit direct $S(I) \times S(J)$ (pour cela on pourra définir une application $f : S(I) \times S(J) \to H_I H_J$ et montrer que cette application est un isomorphisme de groupes).
3. Montrez que $\sigma H_I \sigma^{-1} = H_{\sigma(I)}$ et en déduire que, si $I \neq \emptyset$ et $I \neq \{1, \ldots, n\}$, H_I n'est pas distingué dans S_n.
4. Soit, pour $0 \leq k \leq n$, E_k l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal k. Pour $\sigma \in S_n$ et $I \in E_k$, on pose :
$$\sigma \cdot I = \sigma(I).$$
   (a) Montrez que l'on définit ainsi une opération du groupe S_n sur l'ensemble E_k.
   (b) Soit $I \in E_k$. Montrez que le stabilisateur de I dans S_n est égal à $H_I H_{\overline{I}}$ où $\overline{I}$ désigne le complémentaire de I dans $\{1, \ldots, n\}$.
   (c) En déduire, en utilisant les résultats de la question 2, que l'orbite de I a pour cardinal $\binom{n}{k}$. En conclure que l'action de S_n sur E_k est transitive.

Exercice 3

On considère

$$A := \{a + b\sqrt{2} \ : \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}.$$

ainsi que l'application $f : A \to A$ définie par $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$.

1. Montrez que $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.
2. Montrez que f est un automorphisme de l'anneau A.
3. Soit $g : A \to A$ un homomorphisme d'anneaux.
   (a) Montrez que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $g(a + b\sqrt{2}) = a + bg(\sqrt{2})$.
   (b) Montrez que, si $x = g(\sqrt{2})$, x vérifie $x^2 = 2$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $g = \mathrm{Id}$ ou $g = f$.
4. Soit $B := \{a + b\sqrt{3} \ : \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$. On admettra sans démonstration que B est aussi un anneau commutatif. Montrez qu'il n'existe pas d'homomorphisme d'anneaux de A dans B.
5. Montrez que A est isomorphe au quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2)\mathbb{Z}[X]$.