

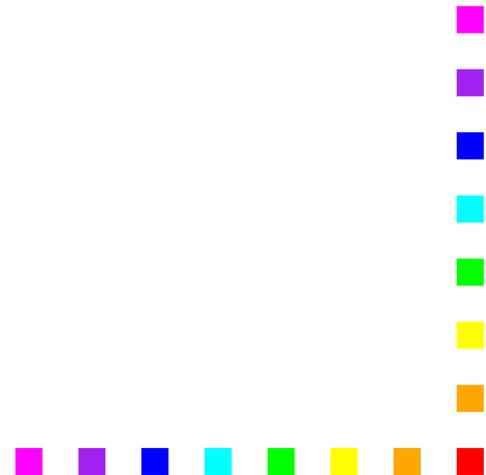
Cercles et Sphères

Christine Bachoc

`bachoc@math.u-bordeaux.fr`

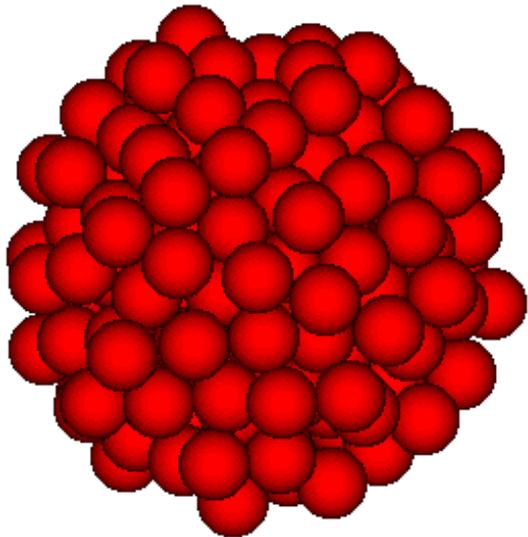
`http://www.math.u-bordeaux.fr/~bachoc`

Laboratoire A2X, Université de Bordeaux I



Empilements de sphères

Un empilement de sphères est la réunion de sphères de même rayon, n'ayant aucun point intérieur commun.

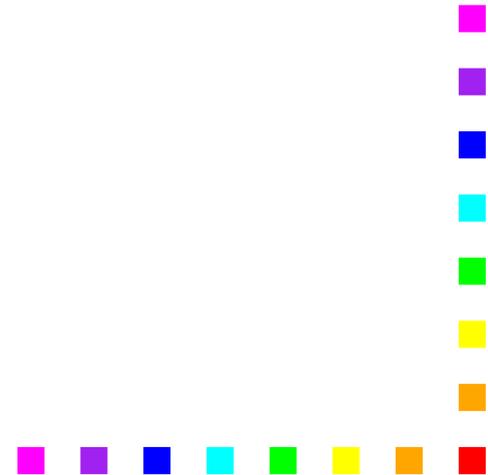


Les empilements de sphères que nous considèrerons s'étendent à l'infini.

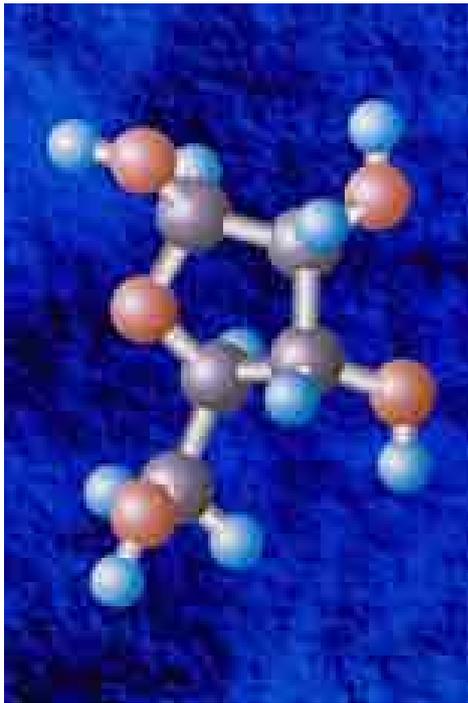


Boulets de canon

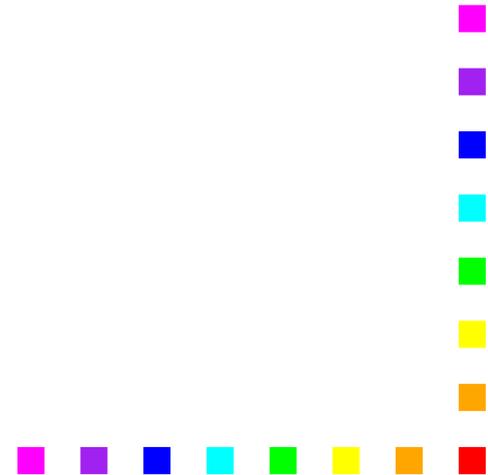
Arlington, Virginia,
1863



Molécules



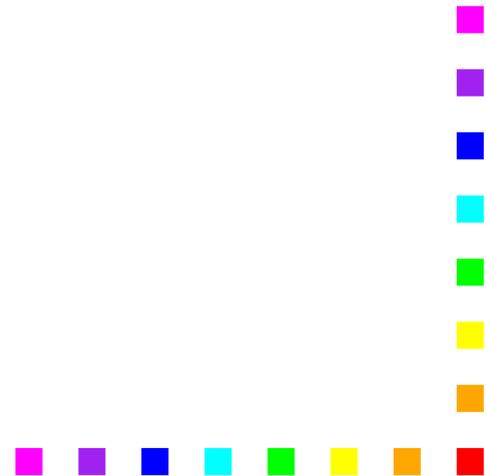
La modélisation des atomes par des sphères conduit à étudier les différentes façons d'empiler les sphères.



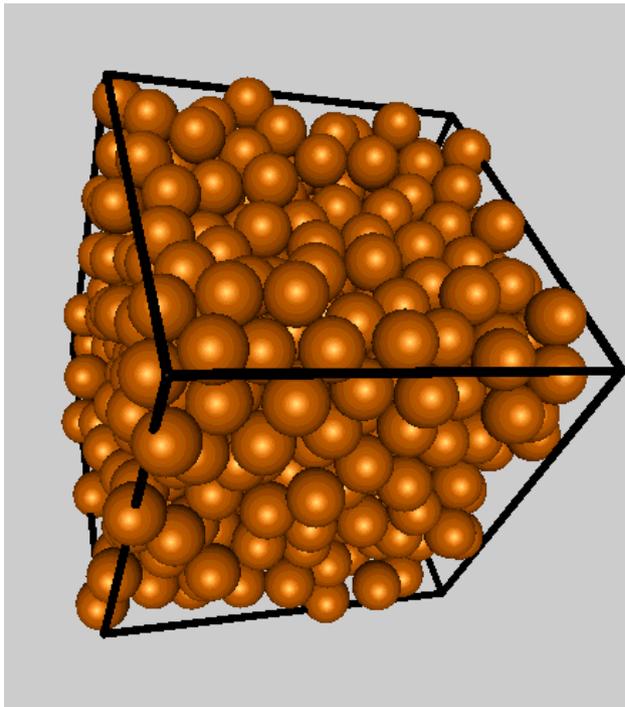
La densité d'un empilement de sphères

La densité δ d'un empilement de sphères mesure la proportion d'espace occupée par les sphères.

Question: Comment arranger les sphères de sorte que cette densité soit la plus grande possible?



Calcul de la densité



- On calcule la densité δ d'un empilement dans une boîte de "grande taille" de côté R . Les sphères sont de rayon 1.

- $\delta = \frac{\text{vol des sphères}}{\text{vol de la boîte}}$

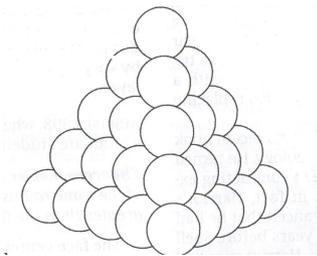
$$\delta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{nb sphères} \cdot \frac{4\pi}{3}}{R^3}$$



La conjecture de Kepler

1611: Johannes Kepler *“Les cristaux de neige à six branches”*.

Il construit l'empilement **cubique à faces centrées** et affirme “qu’il est le plus serré, de sorte qu’aucun autre arrangement pourrait mettre plus de boules dans le même volume”.



Sa densité est égale à

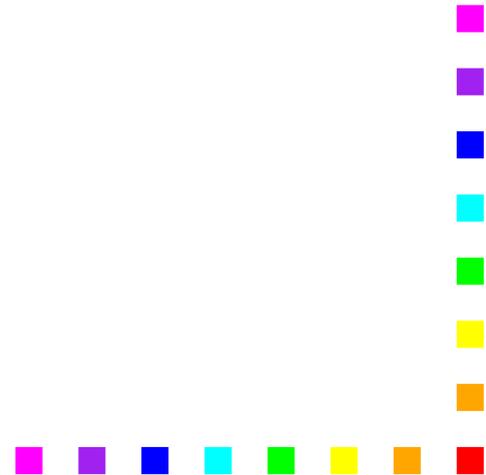
$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \simeq 0.74$. Cette affirmation est depuis connue sous le nom de **Conjecture de Kepler**.



... **Démontrée en 1998!**



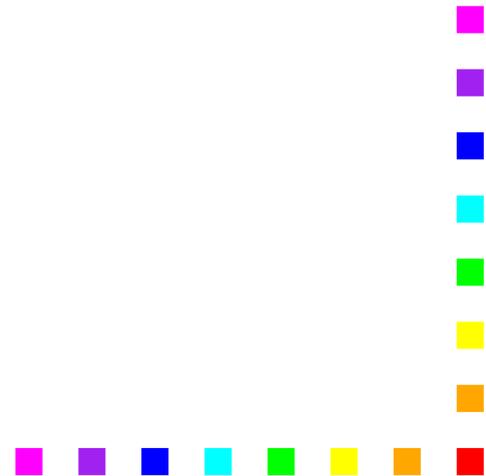
par Thomas Hales
282 pages + longs
calculs sur ordinateurs



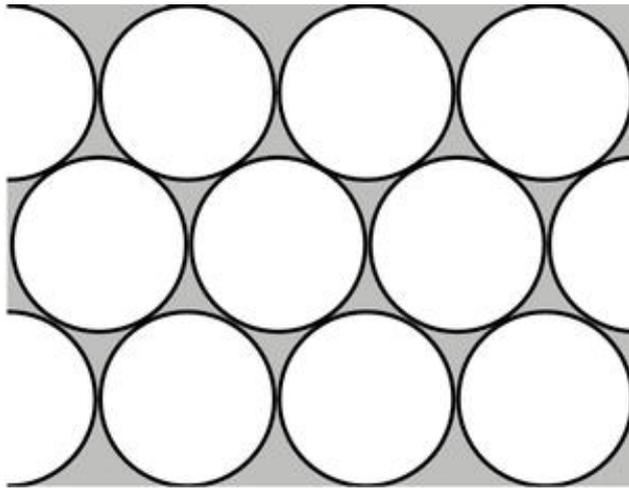
Cercles dans le plan

Un problème a priori plus simple:

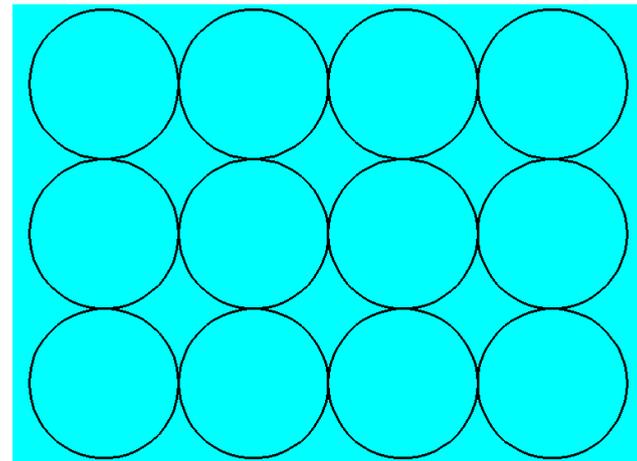
Quel empilement de disques dans le plan occupe le moins de surface?



Exemples



Empilement hexagonal

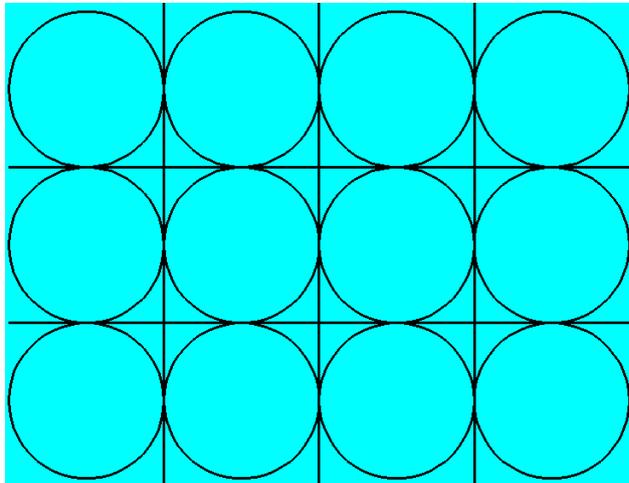


Empilement carré



Un calcul de densité

On peut partager le plan en carrés dans lesquels la densité est facile à calculer.



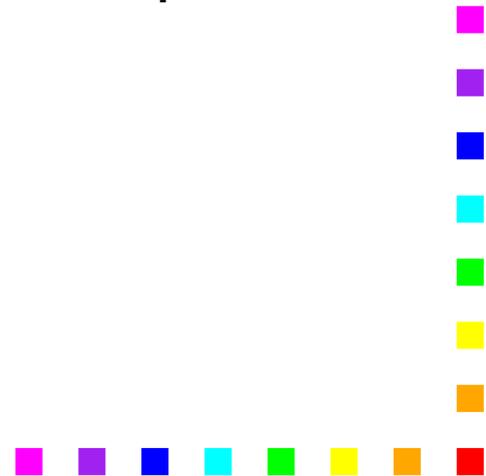
$$\delta = \frac{\text{vol}(\text{disque})}{\text{vol}(\text{carr})} = \frac{\pi}{4}$$

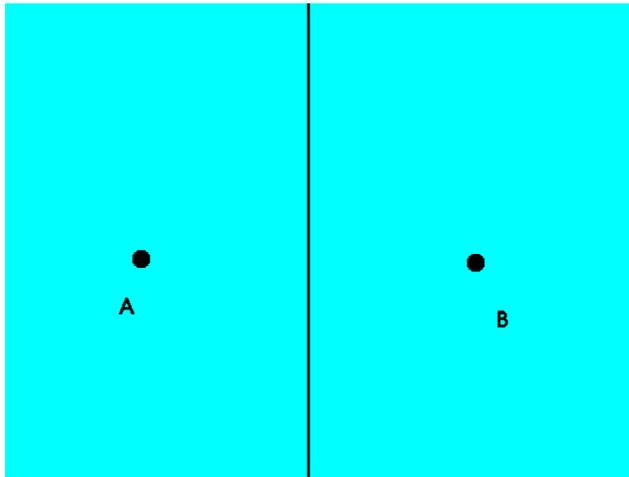


Cellules de Voronoï

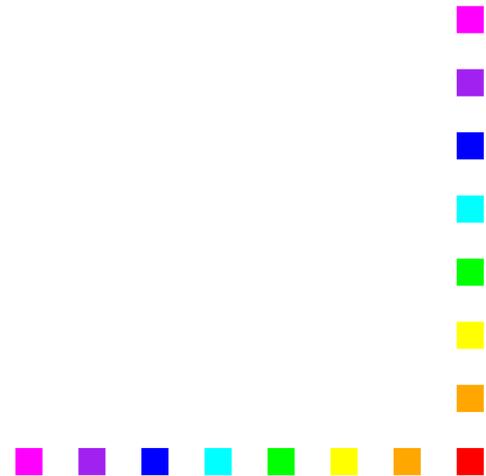
Si S est l'ensemble des centres des cercles d'un empilement de cercles de rayon 1, on peut partitionner le plan en *cellules de Voronoï* associées à S .

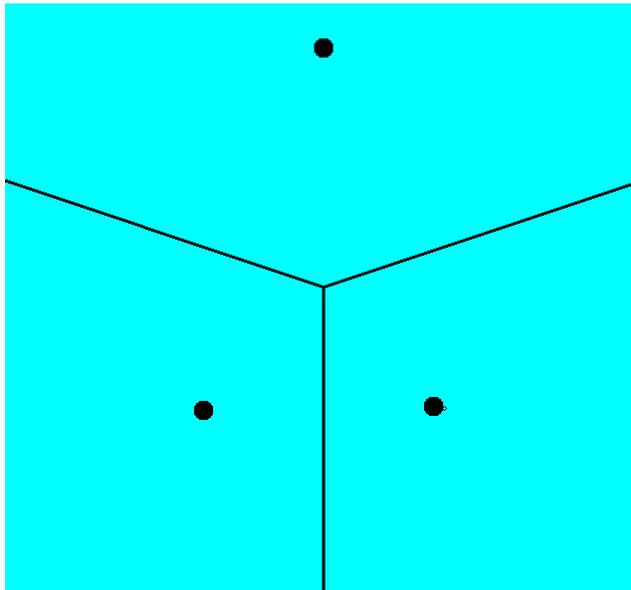
La cellule de Voronoï $V(O)$ d'un point O de S est l'ensemble des points du plan plus proches de O que de tout autre point de S .



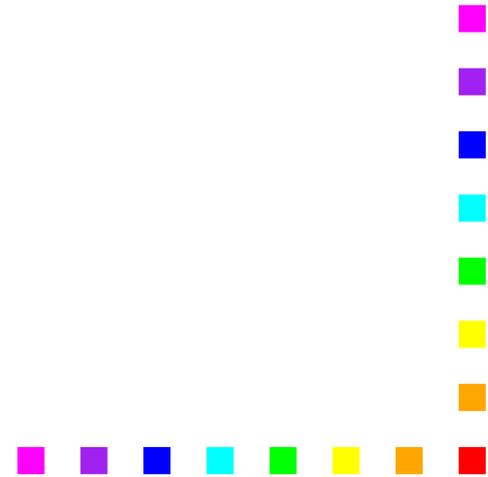


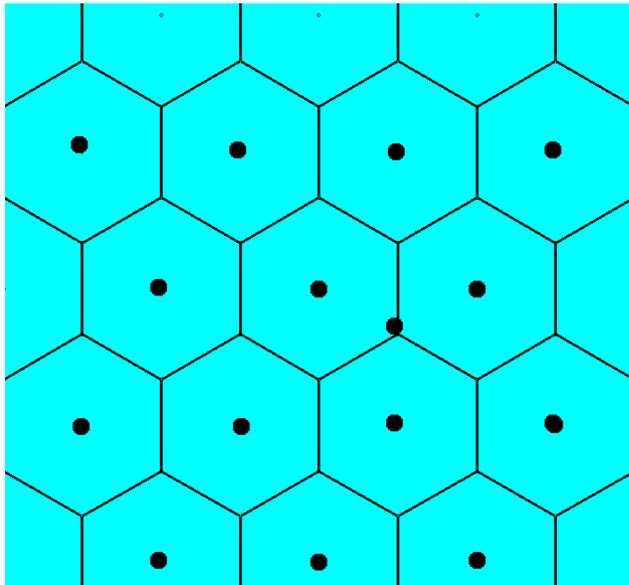
La médiatrice du segment $[A, B]$ sépare le plan en deux régions respectivement le lieu des points les plus proches de A et de B .





Les cellules de Voronoï de trois points

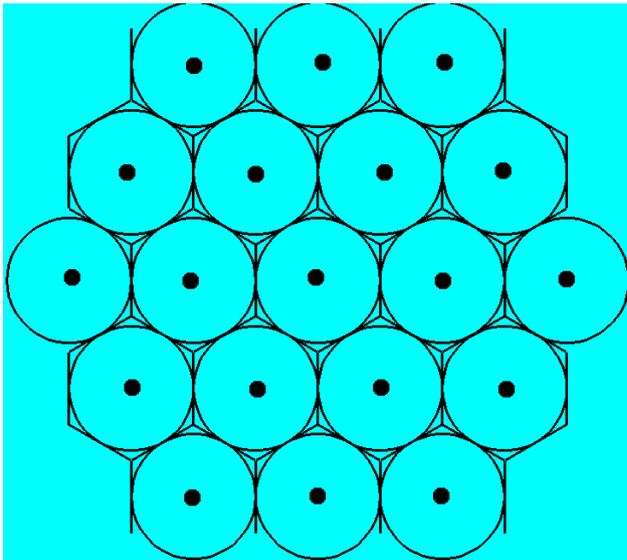




Les cellules de Voronoï des points en position hexagonale.

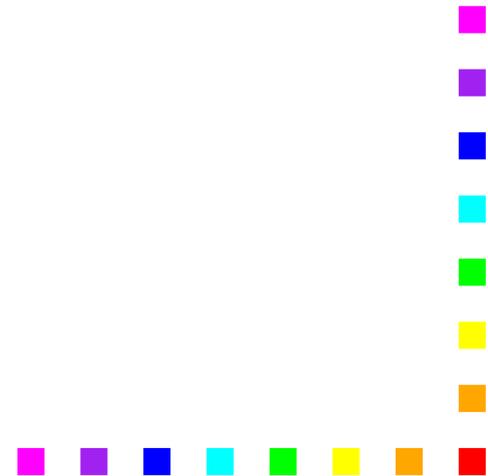
Si l'empilement est quelconque, elles ne sont pas toutes identiques comme ici! Si elles le sont, on dit que l'empilement est régulier.





Chaque cellule de Voronoï contient un disque.

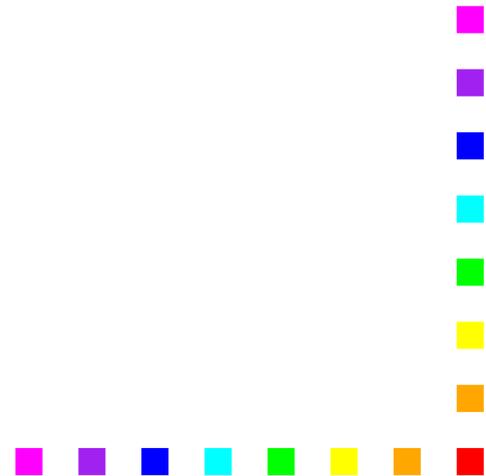
La densité dans la cellule de Voronoï $V(O)$ de centre O est égale à $\frac{\pi}{\text{vol}(V(O))}$.



La densité de l'empilement est donc inférieure à la densité dans la *meilleure* cellule de Voronoï , c'est-à-dire celle qui a le plus petit volume.

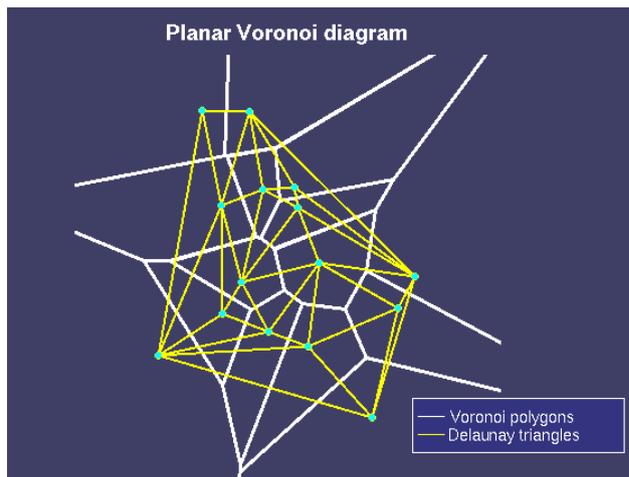
On peut démontrer que la cellule hexagonale est la cellule de Voronoï de plus petit volume, et en déduire que l'empilement hexagonal est le meilleur empilement de cercles.

Sa densité est $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \simeq 0.9069$.



Cellules de Delaunay

Une autre partition du plan est obtenue en joignant deux points de S lorsque le segment qui les joint coupe une arête des cellules de Voronoï.



Les **cellules de Delaunay** sont centrées aux sommets de celles de Voronoï. Elles sont triangulaires, ou bien subdivisibles en triangles.



Il est facile de voir que le triangle équilatéral de côté 2 est celui qui atteint la meilleure densité. Il pave le plan dans la partition de Delaunay de l'empilement hexagonal, qui est donc optimal.

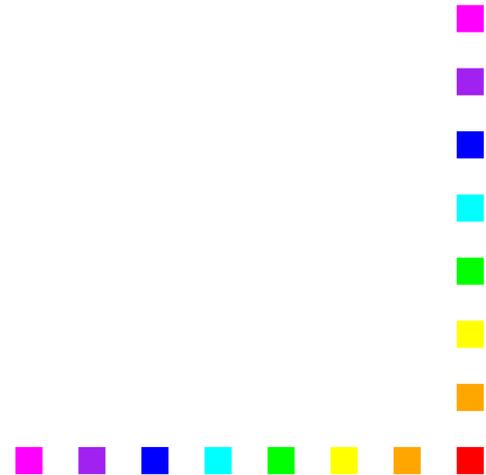
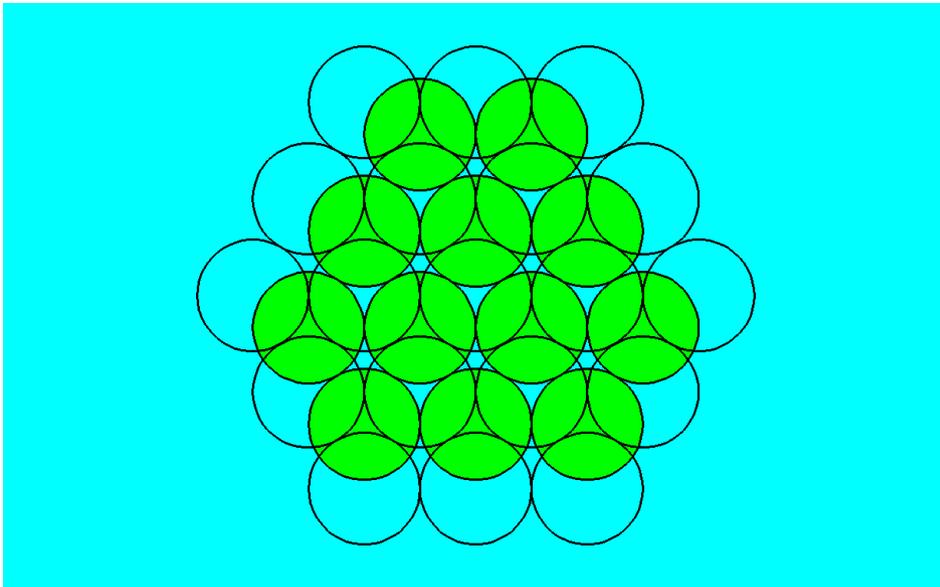
- Gauss démontre la conjecture de Kepler en dimension 2 et 3 pour les empilements réguliers.
- 1890: Thue démontre la conjecture de Kepler en dimension 2.



Dans l'espace

L'empilement A_3 ou cubique à faces centrées:

On pose les unes sur les autres des couches de sphères en position hexagonale.

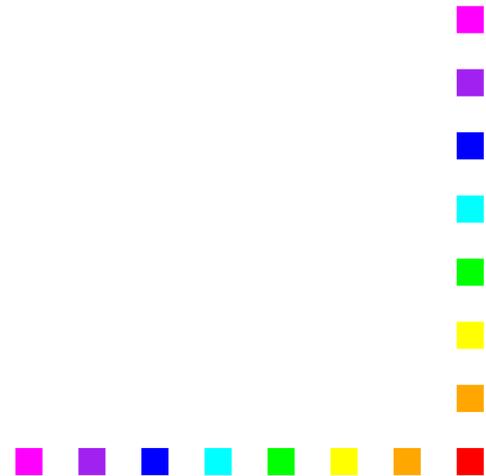


À chaque étage, il y a deux possibilités: **r**, **b**.

L'empilement A_3 est obtenu par:

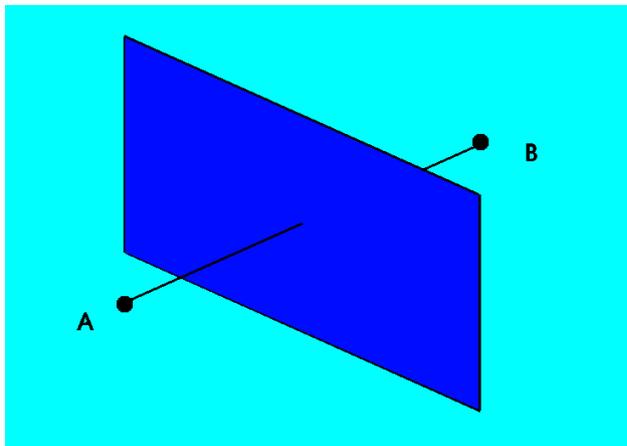
nrbnrbnrbnrbnrb

Les autres choix conduisent à des empilements tout aussi denses, mais pas réguliers.



Cellules de Voronoï

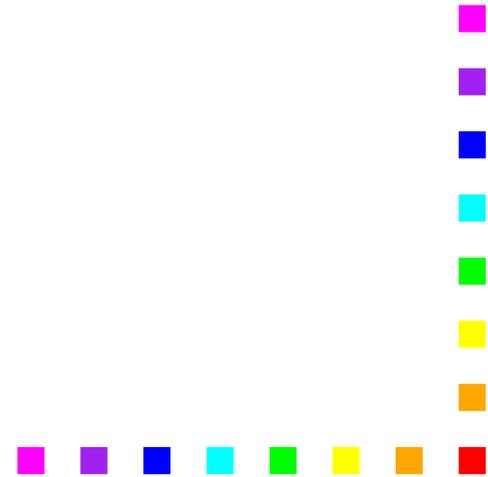
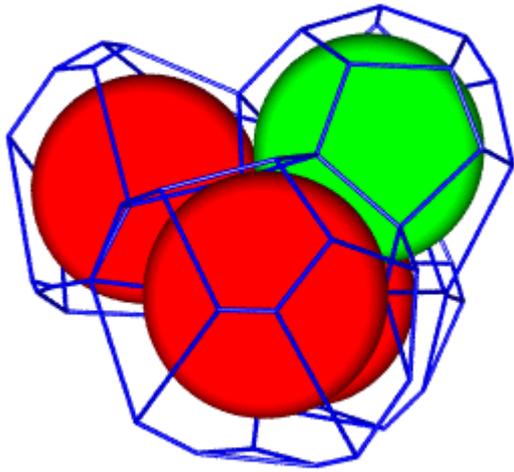
Soit S l'ensemble des centres des sphères d'un empilement. La cellule de Voronoï $V(O)$ d'un point O de S est l'ensemble des points de l'espace plus proches de O que des autres points de S .



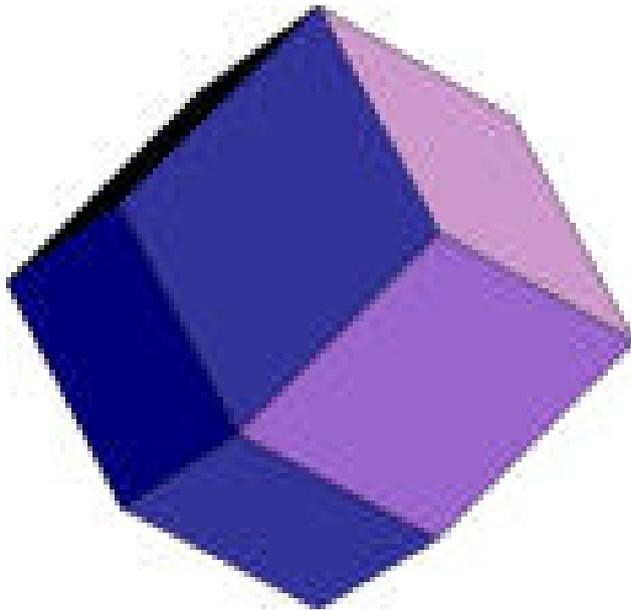
Plan médiateur de deux points



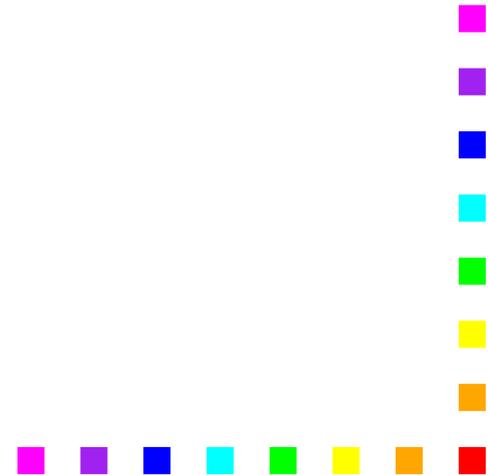
Les cellules de Voronoï sont des polyèdres.



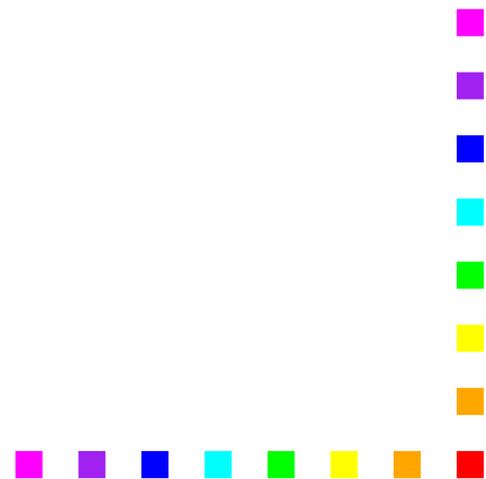
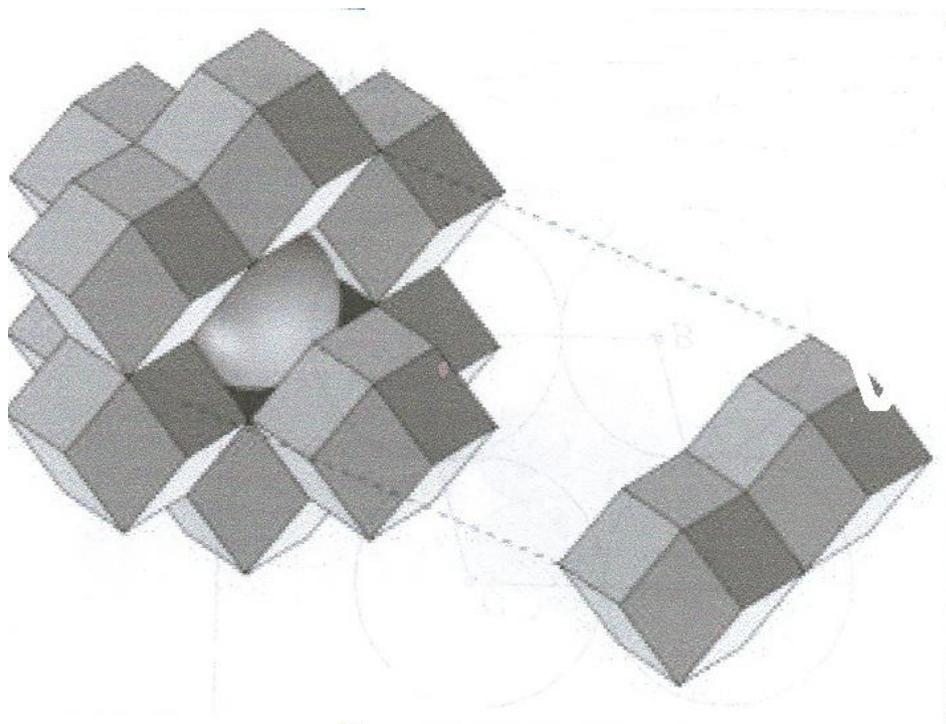
Les cellules de Voronoï de l'empilement A_3



Ce sont des dodécaèdres à faces de losanges.

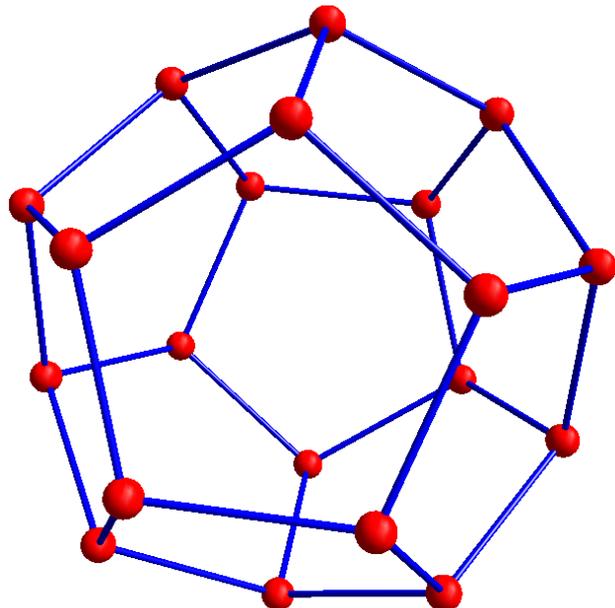


Ils pavent l'espace



La conjecture du dodécaèdre

Le dodécaèdre régulier est une cellule de Voronoï de plus petit volume que le dodécaèdre à face de losange! Mais il ne pave pas l'espace.



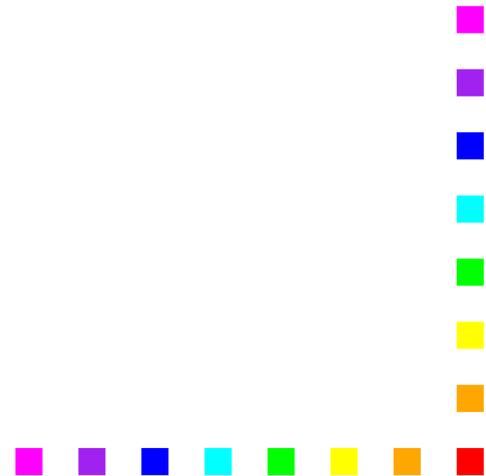
Conjecture du dodécaèdre:

C'est la cellule de Voronoï minimale.

Démontrée par McLaughlin, 1999.



La cellule de Voronoï de l'empilement A_3 est un **minimum global** mais pas un **minimum local** comme en dimension 2. Il faut considérer simultanément des ensembles de cellules voisines. Une stratégie pour atteindre ainsi la conjecture de Kepler est proposée par Fejes Tóth en 1953.

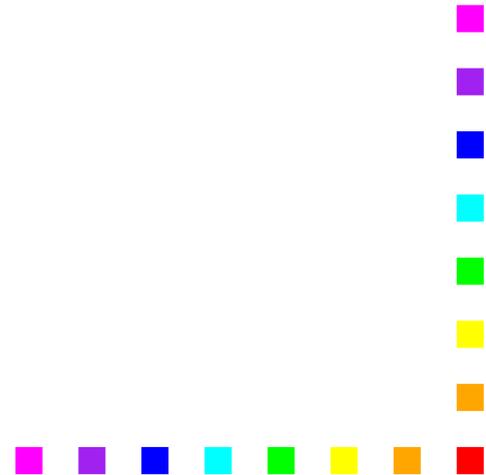
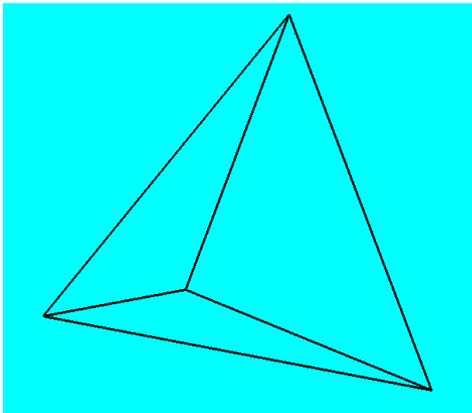


Les cellules de Delaunay

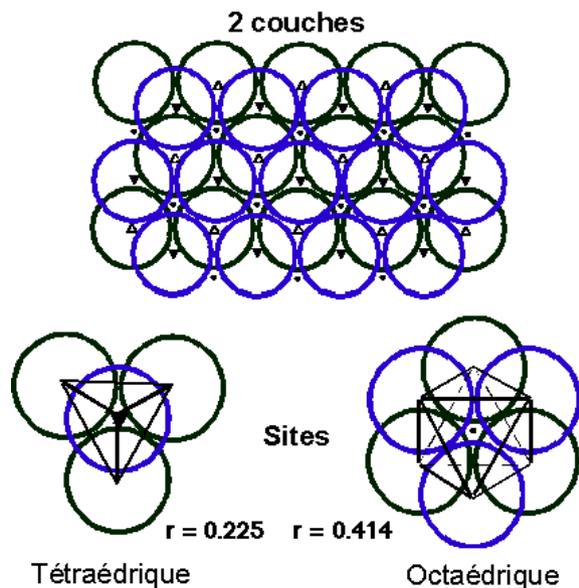
Elles sont obtenues en joignant les paires de points de S dont le segment traverse une face d'une cellule de Voronoï.

1958 Rogers: on peut les subdiviser en tétraèdres.

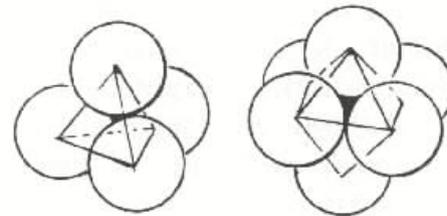
Conséquemment, la densité de l'empilement est au plus égale à celle obtenue dans le **tétraèdre régulier de côté 2**.

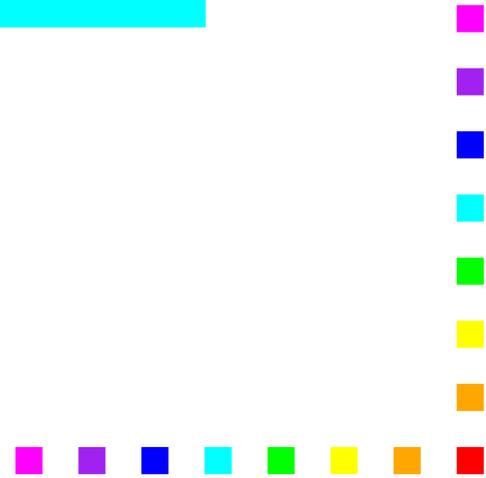
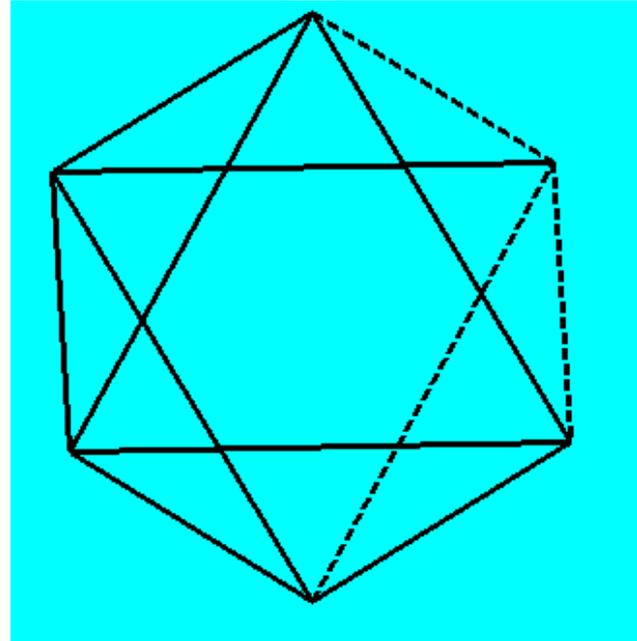
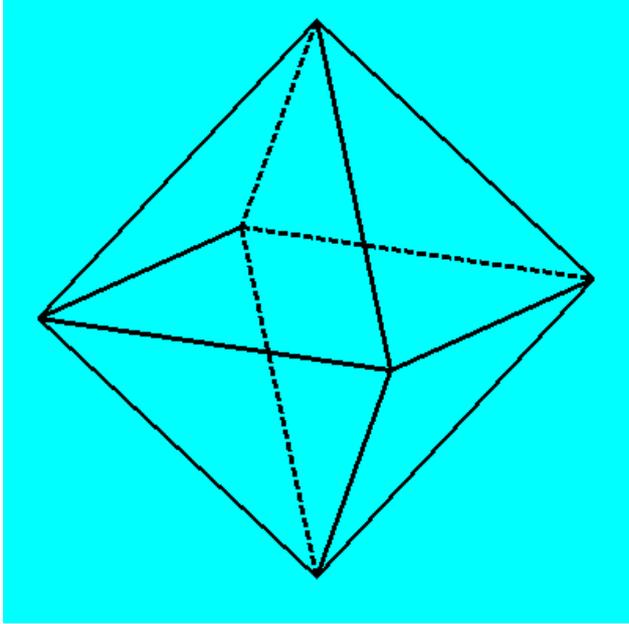


Les cellules de Delaunay de l'empilement A_3



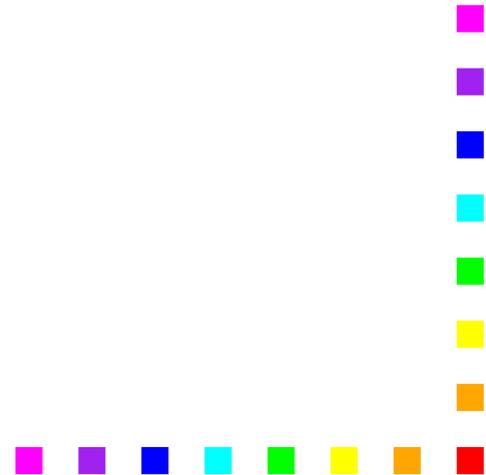
Il y en a de deux sortes: tétraèdres réguliers et octaèdres réguliers. La borne de Rogers ne peut être atteinte!





La démonstration de Hales

Il utilise une décomposition de l'espace hybride entre celles de Voronoï et Delaunay. Il construit une fonction sur l'espace des cellules voisines d'un point, qui joue le rôle de terme correcteur aux volumes de ses cellules. La complexité du problème est liée à la combinatoire de ces cellules.



Pour aller plus loin ..

Thomas C. Hales, *Cannonballs and Honeycombs*, Notices of the AMS, Vol 47, N.4

Thomas C. Hales, *An overview of the Kepler conjecture*

Joseph Oesterlé, *Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3*, Séminaire Bourbaki, 1998-99, n° 863

N.J.A. Sloane, *Kepler confirmed* Nature, 395

