

Autour du théorème limite central presque sûr

B. Bercu

Institut de Mathématiques de Bordeaux

Toulouse, 18 Septembre, 2008



Plan

- 1 Théorème limite central presque sûr
 - Loi forte des grands nombres
 - Théorème limite central
 - Théorème limite central presque sûr
 - Une version martingale
- 2 Applications
 - Matrices aléatoires circulantes
 - Périodogramme empirique
 - Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



Plan

- 1 Théorème limite central presque sûr
 - Loi forte des grands nombres
 - Théorème limite central
 - Théorème limite central presque sûr
 - Une version martingale
- 2 Applications
 - Matrices aléatoires circulantes
 - Périodogramme empirique
 - Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



Loi forte des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires **iid** avec $\mathbb{E}[X_n] = m$ et $\mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2$. Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, on a

$$(LGN) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = m \quad \text{p.s.}$$

$$(LFQ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k} - m \right)^2 = \sigma^2 \quad \text{p.s.}$$



Plan

1 Théorème limite central presque sûr

- Loi forte des grands nombres
- **Théorème limite central**
- Théorème limite central presque sûr
- Une version martingale

2 Applications

- Matrices aléatoires circulantes
- Périodogramme empirique
- Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



Théorème limite central

On a également

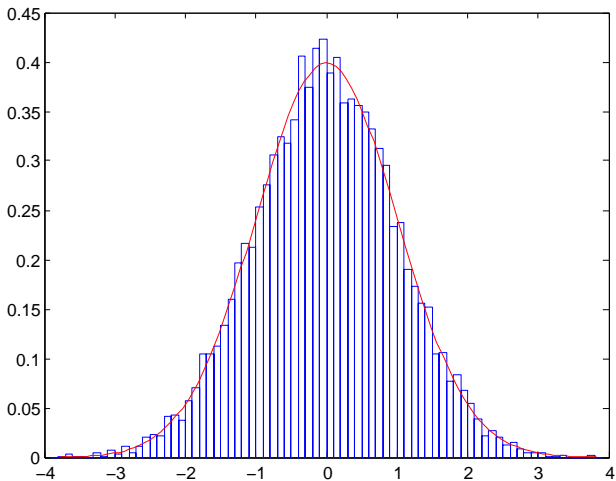
$$(TLC) \quad \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Pour toute fonction **h continue bornée**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[h \left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}} h(x) dG(x)$$

où G est la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.





Plan

- 1 **Théorème limite central presque sûr**
 - Loi forte des grands nombres
 - Théorème limite central
 - **Théorème limite central presque sûr**
 - Une version martingale
- 2 **Applications**
 - Matrices aléatoires circulantes
 - Périodogramme empirique
 - Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



Théorème limite central presque sûr

On a aussi

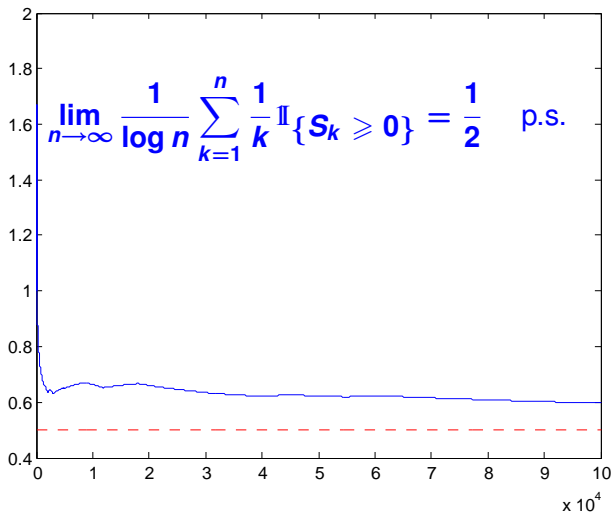
$$(TLCPS) \quad \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta \left(\frac{S_k - km}{\sqrt{k}} \right) \Longrightarrow G \quad \text{p.s.}$$

Pour toute fonction **h continue bornée**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} h \left(\frac{S_k - km}{\sqrt{k}} \right) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dG(x) \quad \text{p.s.}$$



Loi forte de l'arc-sinus



Sur les poids

Soit $0 \leq \alpha < 1$,

$$a_n = \frac{\exp((\log n)^\alpha)}{n} \quad \text{et} \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Pour toute fonction **h continue bornée**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^n a_k h\left(\frac{S_k - km}{\sqrt{k}}\right) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dG(x) \quad \text{p.s.}$$



Plan

- 1 Théorème limite central presque sûr
 - Loi forte des grands nombres
 - Théorème limite central
 - Théorème limite central presque sûr
 - **Une version martingale**
- 2 Applications
 - Matrices aléatoires circulantes
 - Périodogramme empirique
 - Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



Soit (ε_n) une suite adaptée à $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ avec

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = \sigma^2.$$

On souhaite étudier la **transformée de martingale**

$$M_n = \sum_{k=1}^n \Phi_{k-1} \varepsilon_k.$$

On appelle **coefficient d'explosion** associé à (Φ_n)

$$f_n = \frac{\Phi_n^2}{S_n} \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \Phi_k^2.$$



Théorème (B-Fort, 2008)

On suppose que, pour tout $p \geq 1$ et $a > 2p$,

$$(H_p) \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} [|\varepsilon_{n+1}|^a | \mathcal{F}_n] < \infty \quad \text{p.s.}$$

Si le coefficient d'explosion $f_n \rightarrow 0$ p.s., on a

$$(TLCPS) \quad \frac{1}{\log s_n} \sum_{k=1}^n f_k \delta \left(\frac{M_k}{\sqrt{s_{k-1}}} \right) \Longrightarrow G \quad \text{p.s.}$$

Pour toute fonction **polynômiale** h ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log s_n} \sum_{k=1}^n f_k h \left(\frac{M_k}{\sqrt{s_{k-1}}} \right) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dG(x) \quad \text{p.s.}$$



Plan

- 1 Théorème limite central presque sûr
 - Loi forte des grands nombres
 - Théorème limite central
 - Théorème limite central presque sûr
 - Une version martingale
- 2 Applications
 - Matrices aléatoires circulantes
 - Périodogramme empirique
 - Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



Matrices aléatoires circulantes

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et soit A_n la matrice **aléatoire circulante symétrique**

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_{n-1} & X_n \\ X_2 & X_3 & X_4 & \cdots & X_n & X_1 \\ X_3 & X_4 & X_5 & \cdots & X_1 & X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_n & X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-2} & X_{n-1} \end{pmatrix}.$$

But. Comportement asymptotique de la mesure spectrale

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{\lambda_k \leq x\}}.$$



Sommes trigonométriques

On va utiliser

$$r_n = \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

ainsi que les sommes trigonométriques

$$S_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t \cos \left(\frac{2\pi kt}{n} \right),$$

$$T_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t \sin \left(\frac{2\pi kt}{n} \right).$$



Valeurs propres

Les valeurs propres de A_n sont données par

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t.$$

Si n est pair

$$\lambda_{n/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (-1)^{t-1} X_t.$$

Pour tout $1 \leq k \leq r_n$

$$\lambda_k = -\lambda_{n-k} = \sqrt{S_{n,k}^2 + T_{n,k}^2}.$$



Valeurs propres

Les valeurs propres de A_n sont données par

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t.$$

Si n est pair

$$\lambda_{n/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (-1)^{t-1} X_t.$$

Pour tout $1 \leq k \leq r_n$

$$\lambda_k = -\lambda_{n-k} = \sqrt{S_{n,k}^2 + T_{n,k}^2}.$$



Valeurs propres

Les valeurs propres de A_n sont données par

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t.$$

Si n est pair

$$\lambda_{n/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (-1)^{t-1} X_t.$$

Pour tout $1 \leq k \leq r_n$

$$\lambda_k = -\lambda_{n-k} = \sqrt{S_{n,k}^2 + T_{n,k}^2}.$$



Théorème (Bose-Mitra, 2002)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires **iid** avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$, $\mathbb{E}[|X_1|^3] < \infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(F_n(x) - F(x))^2] = 0$$

où F est la loi de Rayleigh symétrique

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \exp(-x^2) & \text{si } x \leq 0, \\ 2 - \exp(-x^2) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Convergence uniforme presque sûre

Théorème (B-Bryc, 2007)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires **indépendantes** avec $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\mathbb{E}[X_n^2] = 1$, $\sup \mathbb{E}[|X_n|^3] < \infty$. Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0 \quad \text{p.s.}$$



Plan

- 1 Théorème limite central presque sûr
 - Loi forte des grands nombres
 - Théorème limite central
 - Théorème limite central presque sûr
 - Une version martingale
- 2 Applications
 - Matrices aléatoires circulantes
 - **Périodogramme empirique**
 - Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



Périodogramme empirique

Le **périodogramme empirique** d'une suite (X_n) de variables aléatoires, est donné, pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi[$, par

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n e^{-it\lambda} X_t \right|^2.$$

Sur les **fréquences de Fourier** $\lambda_k = \frac{2\pi k}{n}$, on a

$$I_n(\lambda_k) = S_{n,k}^2 + T_{n,k}^2.$$

But. Comportement asymptotique de la mesure empirique

$$F_n(x) = \frac{1}{r_n} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{I}_{\{I_n(\lambda_k) \leq x\}}.$$



Théorème (Kokoszka-Mikosch, 2000)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires **iid** avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(F_n(x) - (1 - \exp(-x)))^2] = 0.$$

Théorème (B-Bryc, 2007)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires **indépendantes** avec $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\mathbb{E}[X_n^2] = 1$, $\sup \mathbb{E}[|X_n|^3] < \infty$. Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |F_n(x) - (1 - \exp(-x))| = 0 \quad p.s.$$



Plan

- 1 Théorème limite central presque sûr
 - Loi forte des grands nombres
 - Théorème limite central
 - Théorème limite central presque sûr
 - Une version martingale
- 2 Applications
 - Matrices aléatoires circulantes
 - Périodogramme empirique
 - Stabilité des processus autorégressifs contrôlés



On considère le processus autorégressif contrôlé

$$X_{n+1} = \theta f(X_n, \dots, X_{n-d+1}) + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

- X_n → L'observation,
- U_n → Le contrôle dont on a le choix,
- ε_n → Le bruit.

On se fixe deux objectifs à atteindre simultanément

- Estimer le paramètre inconnu θ ,
- Contrôler la dynamique du processus (X_n) .



On considère le processus autorégressif contrôlé

$$X_{n+1} = \theta f(X_n, \dots, X_{n-d+1}) + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

- X_n → L'observation,
- U_n → Le contrôle dont on a le choix,
- ε_n → Le bruit.

On se fixe deux objectifs à atteindre simultanément

- Estimer le paramètre inconnu θ ,
- Contrôler la dynamique du processus (X_n) .



On considère le processus autorégressif contrôlé

$$X_{n+1} = \theta f(X_n, \dots, X_{n-d+1}) + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

- X_n → L'observation,
- U_n → Le contrôle dont on a le choix,
- ε_n → Le bruit.

On se fixe deux objectifs à atteindre simultanément

- Estimer le paramètre inconnu θ ,
- Contrôler la dynamique du processus (X_n) .



On considère le processus autorégressif contrôlé

$$X_{n+1} = \theta f(X_n, \dots, X_{n-d+1}) + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

- X_n → L'observation,
- U_n → Le contrôle dont on a le choix,
- ε_n → Le bruit.

On se fixe deux objectifs à atteindre simultanément

- Estimer le paramètre inconnu θ ,
- Contrôler la dynamique du processus (X_n) .



On considère le processus autorégressif contrôlé

$$X_{n+1} = \theta f(X_n, \dots, X_{n-d+1}) + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

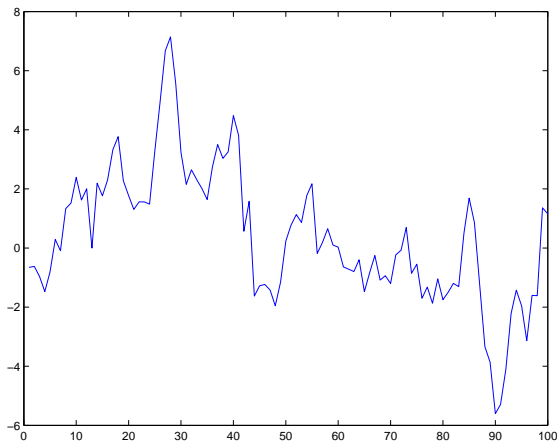
- X_n → L'observation,
- U_n → Le contrôle dont on a le choix,
- ε_n → Le bruit.

On se fixe deux objectifs à atteindre simultanément

- Estimer le paramètre inconnu θ ,
- Contrôler la dynamique du processus (X_n).



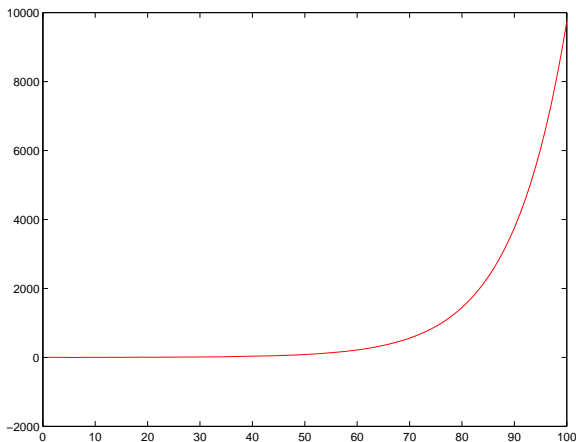
Simulation autorégressif stable $|\theta| < 1$



$$X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$$



Simulation autorégressif explosif $|\theta| > 1$



$$X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$$



Applications Industrielles

- **Aéronautique** → Contrôle de trajectoires d'aéronefs,
- **Biochimie** → Contrôle de fermenteurs,
- **Biostatistique** → Contrôle de dynamique de populations.



Applications Industrielles

- **Aéronautique** → Contrôle de trajectoires d'aéronefs,
- **Biochimie** → **Contrôle de fermenteurs,**
- **Biostatistique** → Contrôle de dynamique de populations.



Applications Industrielles

- **Aéronautique** → Contrôle de trajectoires d'aéronefs,
- **Biochimie** → Contrôle de fermenteurs,
- **Biostatistique** → Contrôle de dynamique de populations.



Estimation et contrôle

On estime θ par l'estimateur des **moindres carrés**

$$\hat{\theta}_n - \theta = \frac{M_n}{S_{n-1}} \quad \text{avec} \quad M_n = \sum_{k=1}^n \Phi_{k-1} \varepsilon_k.$$

On utilise le **contrôle adaptatif de poursuite**

$$U_n = x_{n+1} - \hat{\theta}_n \Phi_n$$

avec $\Phi_n = f(X_n, \dots, X_{n-d+1})$.



Théorème

Si f appartient à l'algèbre des polynômes à d variables et de degré total $a < 4$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta \quad \text{p.s.}$$

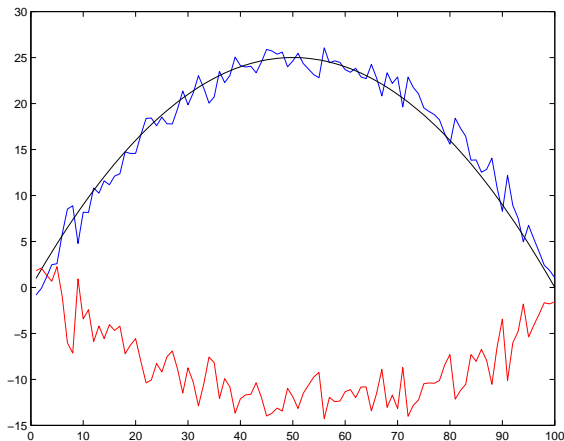
$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \ell).$$

De plus, on a pour tout $1 \leq p \leq a$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n k^{p-1} (\hat{\theta}_k - \theta)^{2p} = \frac{\ell^p (2p)!}{2^p p!} \quad \text{p.s.}$$



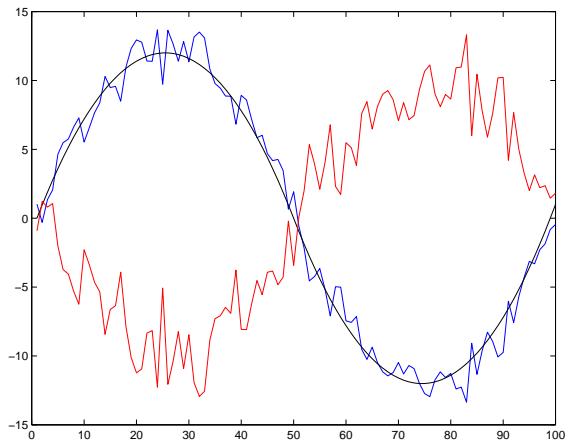
Simulation autorégressif contrôlé



$$X_{n+1} = \theta X_n + U_n + \varepsilon_{n+1}$$



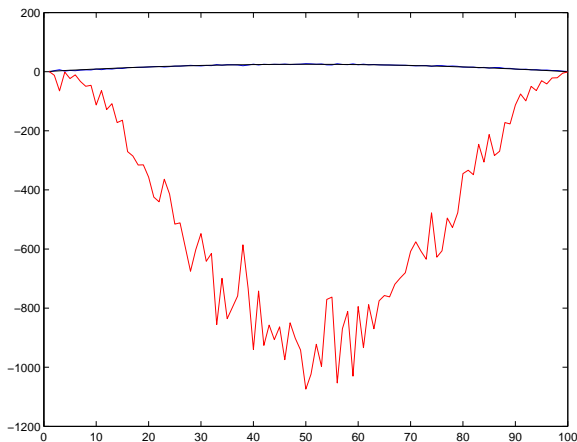
Simulation autorégressif contrôlé



$$X_{n+1} = \theta X_n + U_n + \varepsilon_{n+1}$$



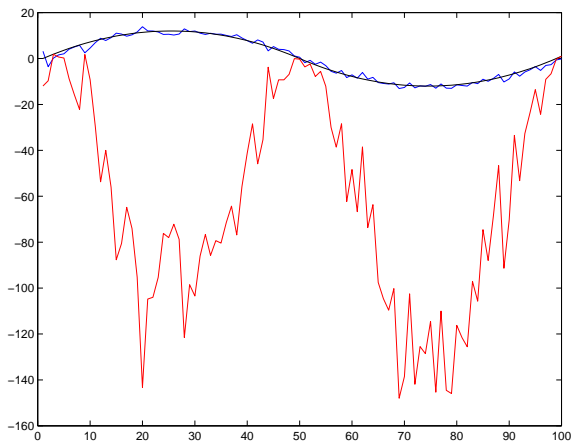
Simulation autorégressif contrôlé



$$X_{n+1} = \theta X_n^2 + U_n + \varepsilon_{n+1}$$



Simulation autorégressif contrôlé



$$X_{n+1} = \theta X_n^2 + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

