UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
LICENCE L3

Le 21/04/2008

EXAMEN DE PROBABILITÉS
CORRECTION

PROBLÈME I

1) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^{1/a} \leq y)$.

$\longrightarrow$ $F_Y(y) = 0$ si $y \leq 0$ et si $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq y^a) = F_X(y^a) = \int_0^{y^a} \lambda \exp(-\lambda x)\,dx$$
$$= 1 - \exp(-\lambda y^a)$$

$\longrightarrow$ Il en découle que $f_Y(y) = \lambda a y^{a-1} \exp(-\lambda y^a) \mathbb{1}_{y>0}$

2) Pour tout $0 < u \leq 1$, on a

$$F_Y(y) = u \iff 1 - \exp(-\lambda y^a) = u \iff \exp(-\lambda y^a) = 1-u$$
$$\iff -\lambda y^a = \log(1-u) \iff y = \left(-\tfrac{1}{\lambda} \log(1-u)\right)^{1/a}$$
$$\iff y = F_Y^{-1}(u)$$

avec $F_Y^{-1}(u) = \left(-\frac{1}{\lambda} \log(1-u)\right)^{1/a}$. Si $u \sim \mathcal{U}([0,1])$, il découle de la méthode d'inversion que la variable aléatoire

$$\left(-\frac{1}{\lambda} \log(u)\right)^{1/a}$$

suit la loi de Weibull $W(a,\lambda)$ ce qui fournit une façon de générer une réalisation de Y.

PROBLÈME II

1) Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$X = X \mathbb{1}_{X < t\mathbb{E}[X]} + X \mathbb{1}_{X \geq t\mathbb{E}[X]} \leq t\mathbb{E}[X] + X \mathbb{1}_{X \geq t\mathbb{E}[X]}$$

→ ce qui entraine $\mathbb{E}[X] \leq t\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geq t\mathbb{E}[X]}]$ donc

$$(1-t)\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geq t\mathbb{E}[X]}].$$

2) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a également

$$\left(\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geq t\mathbb{E}[X]}]\right)^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq t\mathbb{E}[X]}],$$
$$\leq \mathbb{E}[X^2]\, \mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X]).$$

3) Il découle de 1) et 2) que $(1-t)^2(\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\, \mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X])$

$$\mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X]) \geq \frac{(1-t)^2(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}$$

4) Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

→ donc $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$. Il en découle que pour tout $t \in [0,1]$

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{t}{\lambda}\right) \geq \frac{(1-t)^2}{2}$$

→ Si $a = t/\lambda$, on obtient pour tout $0 \leq a \leq 1/\lambda$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \geq \frac{1}{2}(1-a\lambda)^2$$

PROBLÈME III

1) On a $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = 1$ si $x \geq \theta$ et pour
→ tout $x \in [0,\theta]$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{a}{\theta^a}(\theta - t)^{a-1}\,dt = \left[-\frac{1}{\theta^a}(\theta-t)^a\right]_0^x = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^a.$$

2) Soit F_n et f_n la fonction de répartition et la densité de probabilité de $\hat{\theta}_n$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_n(x) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leq x)$$
$$= (F_X(x))^n.$$

→ Par suite,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ \left(1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^a\right)^n \text{ si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 \text{ si } x \geq \theta. \end{cases}$$

→ On en déduit que

$$f_n(x) = \frac{na}{\theta}\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{a-1}\left(1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^a\right)^{n-1} \mathbb{1}_{0\leq x\leq \theta}$$

3) Si $\varepsilon \geq \theta$, on a $\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$ et si $0 < \varepsilon < \theta$, on a

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^a\right)^n = \alpha^n$$

avec $\alpha = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^a$ donc $0 < \alpha < 1$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha}{1-\alpha} < +\infty$$

→ Le lemme de Borel-Cantelli entraine alors que $\hat{\theta}_n \to \theta$ p.s.

4) Soit $Y_n = n^{1/a}(\theta - \hat{\theta}_n)$. On tire du 2) que

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1-\left(1-\frac{1}{n}\left(\frac{x}{\theta}\right)^a\right)^n \text{ si } 0 \leq x \leq n^{1/a}\theta \\ 1 \text{ si } x \geq n^{1/a}\theta. \end{cases}$$

→ On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^a\right)\right)\mathbb{1}_{x\geq 0}$.

→ On peut conclure via le Problème I, 1) que

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$$

avec $Y \sim \mathcal{W}(a, \lambda)$ où $\lambda = \frac{1}{\theta^a}$.

PROBLÈME IV

1) Le couple aléatoire (X_1, S_n) suit la loi $N_2(0, \Gamma)$ avec
→ $\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$. On a $\det(\Gamma) = \sigma^4(n-1)$. Si $n=1$, Γ n'est pas inversible donc (X_1, S_n) ne possède pas de densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. De plus, si $n \geq 2$, Γ est inversible et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{(X_1,S_n)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(n-1)}(nx^2 - 2xy + y^2)\right)$$

2) Si $n \geq 2$, on en déduit que

$$f_{X_1|S_n=y}(x) = \frac{f_{X_1,S_n}(x,y)}{f_{S_n}(y)} = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(x - \frac{y}{n}\right)^2\right)$$

→ avec $\sigma_n^2 = \sigma^2 \frac{(n-1)}{n}$ car $S_n \sim N(0, \sigma^2 n)$. Par suite,

$$\mathcal{L}(X_1 | S_n) = N\left(\frac{S_n}{n}, \sigma_n^2\right)$$

→ On peut noter que la loi $\mathcal{L}(X_1|X_1) = \delta_{X_1}$ pour $n=1$.

3) On tire du 2) que $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{S_n}{n}$ et $\mathrm{Var}(X_1|S_n) = \sigma_n^2$.

PROBLÈME V

→ Si $T = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, il est clair que $T \sim N_3(0, I_3)$ et $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = AT$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

→ On a $AA^t = I_3$ donc $AT \sim N_3(0, I_3)$ ce qui entraîne que U, V et W sont indépendantes et de même loi $N(0,1)$. On a
→ $\mathbb{E}[U|X] = \mathbb{E}[aX - bZ|X] = a\mathbb{E}[X|X] - b\mathbb{E}[Z|X] = aX$. De plus
→ Comme $\begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \sim N_2(0, I_2)$, on a $\mathbb{E}[X|U] = \mathbb{E}[XU]U = aU$.