UNIVERSITÉ BORDEAUX I
LICENCE L3

le 07/05/2009 ①

EXAMEN DE PROBABILITÉS
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(\varepsilon X = k)$ donc

$\rightarrow$ $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(\varepsilon X = k \text{ et } \varepsilon = 1) + \mathbb{P}(\varepsilon X = k \text{ et } \varepsilon = -1)$

$= \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(\varepsilon=1) + \mathbb{P}(X=-k)\mathbb{P}(\varepsilon=-1)$

$= p\,\mathbb{P}(X=k) + (1-p)\,\mathbb{P}(X=k)$ car X est symétrique

$= \mathbb{P}(X=k)$.

$\rightarrow$ On peut conclure que X et Y suivent la même loi

2) Comme X et Y ont même loi, Y est symétrique donc $\mathbb{E}[Y]=0$.

$\rightarrow$ Sinon, $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\varepsilon X] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[X] = (2p-1)\times 0 = 0$.

3) $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\varepsilon X^2] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[X^2]$

$= (2p-1)\mathbb{E}[X^2]$

$\rightarrow$ $\text{Cov}(X,Y) = 0$ ssi $p = \frac{1}{2}$ ou $X = 0$ p.s.

PROBLÈME II

1) Si $X \sim N(0,\sigma^2)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ $\mathbb{E}[\exp(tX)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(tx)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\sigma^2 tx)\right)dx$

$\rightarrow \mathbb{E}[\exp(tX)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\sigma^2 t)^2\right) \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dx$

$= \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ avec $y = \frac{x-\sigma^2 t}{\sigma}$

$= \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$

$\rightarrow$ Il en découle que X est sous-gaussienne avec $\alpha(X) = \sigma^2$.

2) Si X est centrée avec $|X| \leq 1$, on tire de l'indication que

$\rightarrow$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \mathbb{E}[X \sinh(t)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

car $\mathbb{E}[X] = 0$. On peut conclure que X est sous-gaussienne avec $\sigma(X) \leq 1$.

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\exp(tS_n)] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t \sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \exp(tX_k)\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(tX_k)] \quad \text{par indépendance}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right).$$

4) Pour tout $x \geq 0$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) = \mathbb{P}(\exp(tS_n) \geq \exp(tx)) \leq \exp(-tx)\, \mathbb{E}[\exp(tS_n)]$$

grâce à l'inégalité de Markov.

$\rightarrow$ Il découle du 3) que $\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \exp\left(-tx + \frac{nt^2}{2}\right)$.

$\rightarrow$ Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(t) = -tx + \frac{nt^2}{2}$.

On a $\varphi'(t) = -x + nt$, $\varphi'(t) = 0 \iff t = \frac{x}{n}$. La fonction φ admet un minimum en ce point et $\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = -\frac{x^2}{2n}$. On a donc

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right).$$

5) Pour tout $x \geq 0$ et $t \leq 0$, on a de même

$$\mathbb{P}(S_n \leq -x) = \mathbb{P}(\exp(tS_n) \geq \exp(-tx)) \leq \exp\left(tx + \frac{nt^2}{2}\right)$$

et en prenant $t = -\frac{x}{n}$, on trouve que

$$\mathbb{P}(S_n \leq -x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right).$$

Par suite, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq x) = \mathbb{P}(S_n \geq x) + \mathbb{P}(S_n \leq -x) \leq 2\exp\left(\frac{-x^2}{2n}\right).$$

6) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a par le 5) avec $x = n\varepsilon$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n| \geq n\varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

On a donc $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2}\right)\right)^n < +\infty.$

Finalement, par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

PROBLÈME III

1) Il est clair que $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = 1) &= \mathbb{P}(X_n X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1 \text{ et } X_{n+1} = -1) \\
&= \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = -1) \text{ par indépendance} \\
&= p^2 + (1-p)^2 = \pi
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - \pi$, $Y_n \sim \mathcal{R}(\pi)$. En particulier, $\mathbb{E}[Y_n] = 2\pi - 1$.

2) On ne peut appliquer directement la loi fortes des grands nombres car (Y_n) n'est pas constituée de variables indépendantes. Cependant, on a la décomposition

$$S_n = A_n + B_n$$

avec $A_n = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{n} Y_k$ et $B_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} Y_k$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} A_n = 2\Pi - 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} B_n = 2\Pi - 1 \text{ p.s.}$$

→ Comme

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}A_n + \frac{2}{n}B_n\right),$$

il advient que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 2\Pi - 1 = 2\left(p^2 + (1-p)^2\right) - 1 = (2p-1)^2 \text{ p.s.}$$

3) On déduit immédiatement du TLC que, si $m = 2\Pi - 1$

$$\frac{P_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \text{ et } \frac{Q_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

4) Il n'est pas possible d'en déduire le TLC pour (S_n) car
→ la convergence en loi de 2 variables aléatoires n'implique pas la convergence en loi de la somme.

PROBLÈME IV

1) On peut écrire $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2Z$ où $Z \sim N_2(0, Id_2)$. De plus,
→ on a également $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2AZ$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

→ On a $AA^t = Id_2$ donc $AZ \sim N_2(0, Id_2)$ ce qui entraine que U et V sont indépendantes et de même loi $N(0,4)$.

2) On a $S = a(U+V)^2 = a(U+bT)^2 = aU^2 + 2abUT + ab^2T^2$
→ De plus, comme U et V sont indépendantes, U et T sont indépendantes. Par suite, $E[S|T] = aE[U^2] + 2abTE[U] + ab^2T^2$

$$= 4a + ab^2T^2.$$