UNIVERSITÉ BORDEAUX I
LICENCE L3

le 03/05/2010

EXAMEN DE PROBABILITÉS
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $\mathbb{P}(Y_n=0) = 1-\mathbb{P}(Y_n \neq 0) = 1-\mathbb{P}(X_1\neq 0, \dots, X_n \neq 0)$

$\to$ $\mathbb{P}(Y_n=0) = 1-\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k\neq 0) = 1-\prod_{k=1}^{n}(2p) = 1-(2p)^n$.

$\to$ De plus, il est clair que Y_n est une variable aléatoire symétrique donc $\mathbb{P}(Y_n=1)=\mathbb{P}(Y_n=-1)$. Par suite, si $p_n = \mathbb{P}(Y_n=1)$, on a

$$\mathbb{P}(Y_n=1)+\mathbb{P}(Y_n=0)+\mathbb{P}(Y_n=-1) = 2p_n + 1-(2p)^n = 1$$

ce qui entraine, $2p_n = (2p)^n$, $p_n = \frac{1}{2}(2p)^n$.

2) Si $p=1/2$, $Y_n \sim \mathcal{R}(1/2)$ donc $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ avec $Y \sim \mathcal{R}(1/2)$.

$\to$ De plus, si $p=1/2$, $Y_n \not\to Y$ p.s. En effet, $\forall n\geq 1$, $Y_n \sim \mathcal{R}(1/2)$ donc Y_n a même loi que $-Y$ car Y est symétrique.
Pour tout $0<\varepsilon<2$, $\mathbb{P}(|Y_n-Y|\geq\varepsilon) = \mathbb{P}(2|Y|\geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y|\geq \frac{\varepsilon}{2})$
$= \mathbb{P}(|Y|=1) = 1$ donc $Y_n \overset{\mathbb{P}}{\not\to} Y$ et donc $Y_n \not\to Y$ p.s.

$\to$ Ensuite, si $0 \leq p < 1/2$, on a pour tout $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|Y_n|\geq\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} 2p_n = \sum_{n=1}^{\infty}(2p)^n = \frac{2p}{1-2p} < +\infty$$

donc $Y_n \to 0$ p.s.

PROBLÈME II

1) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^{1/a} \leq y)$

→ $F_Y(y) = 0$ si $y \leq 0$ et, si $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq y^a) = F_X(y^a) = \int_0^{y^a} \lambda \exp(-\lambda x)dx$$
$$= 1 - \exp(-\lambda y^a).$$

2) Pour tout $0 < u \leq 1$, on a $\forall x \geq 0$

$$F_X(x) = u \iff 1 - \exp(-\lambda x) = u \iff x = -\frac{1}{\lambda}\log(1-u).$$

→ Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, la variable aléatoire $-\frac{1}{\lambda}\log(1-U)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ donc $\left(-\frac{1}{\lambda}\log(1-U)\right)^{1/a}$ suit la loi de Weibull $W(a,\lambda)$.

PROBLÈME III

1) Soit h une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a

→ $$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \mathbb{E}\left[h\left(\sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V)\right)\right]$$
$$= \iint_{[0,1]^2} h\left(\sqrt{-2\log u}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\log u}\sin(2\pi v)\right)du\,dv$$

→ On pose

$$\begin{cases} x = \sqrt{-2\log u}\cos(2\pi v) \\ y = \sqrt{-2\log u}\sin(2\pi v) \end{cases}$$

→ $x^2+y^2=-2\log u$ et $\frac{y}{x}=tg(2\pi v)$ donc

$$\begin{cases} u=\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) \\ v=\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

→ $\frac{\partial u}{\partial x}=-x\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-y\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{2\pi(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{2\pi(x^2+y^2)}$$

car $(\operatorname{arctg}(z))'=\frac{1}{1+z^2}$. Le jacobien de cette transformation vaut donc $J=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$.

→ Finalement, $\mathbb{E}[h(X,Y)]=\iint_{\mathbb{R}^2}h(x,y)\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dxdy$

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right).$$

2) On en déduit que X et Y sont indépendantes et de même loi $N(0,1)$ car $f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ avec

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ et } f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

PROBLÈME IV

1) Il est clair que

$$m=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ et } \Gamma=\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}$$

2) On a vu en cours que $\mathcal{L}(Y|X)=N(rX,1-r^2)$. On peut

→ le vérifier car $f_X(x)=\int_{\mathbb{R}}f_{(X,Y)}(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

→ Par suite,

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{(y-rx)^2}{2(1-r^2)}\right).$$

→ On reconnait la densité de la loi $N(rx, 1-r^2)$ donc

$$\mathcal{L}(Y|X) = N(rX, 1-r^2).$$

3) Si $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, on peut écrire $U = \Gamma^{1/2} Z$ où $Z \sim N(0, I_2)$. Mais

$$V = U^t \Gamma^{-1} U = Z^t \Gamma^{1/2} \Gamma^{-1} \Gamma^{1/2} Z = Z^t Z = \|Z\|^2$$

→ donc $V \sim \chi^2(2)$.

PROBLÈME V

1) On a $F(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F(x) = 1$ si $x \geq \theta$ et, si $x \in [0, \theta]$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{6}{\theta^3} t(\theta - t) dt = \frac{6}{\theta^3}\left(\frac{\theta x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^2}{\theta^3}(3\theta - 2x).$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_n(x) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \leq x) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq x)$$

→ Il découle du 1) que

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^{2n}}{\theta^{3n}}(3\theta - 2x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

3) $\forall \varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \geq \theta + \varepsilon) + \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq \theta - \varepsilon)$

→ $\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = F_n(\theta - \varepsilon)$. Si $\varepsilon \geq \theta$, $\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$ et si

→ $0 < \varepsilon < \theta$, $\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^{2n}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{\theta}\right)^n = a^n$

avec $a = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2\left(1 + \frac{2\varepsilon}{\theta}\right)$. Comme $0 < a < 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} < +\infty$$

donc $\hat{\theta}_n \to \theta$ p.s.

4) Si $V_n = \sqrt{n}(\theta - \hat{\theta}_n)$, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(V_n \leq x) = \left(1 - \exp\left(-\frac{3x^2}{\theta^2}\right)\right) \mathbb{1}_{x \geq 0}$

→ Finalement, $\sqrt{n}(\theta - \hat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ avec $Y \sim W(2, \lambda)$ où $\lambda = \frac{3}{\theta^2}$.