UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 — Le 18/02/2008 (1)

LICENCE L3

PARTIEL DE PROBABILITÉS
CORRECTION

PROBLÈME I

1) Il est clair que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

2) On a $\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ car,

→ pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

→ De plus, pour tout $1 \leq k, \ell \leq n$ avec $k \neq \ell$, on a

$$\mathbb{P}(A_k \cap A_\ell) = \frac{\text{Card}(A_k \cap A_\ell)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

→ Par suite,

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\mathbb{1}_{A_\ell}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}] + \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k \cap A_\ell}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + 1 = 2$$

ce qui entraine $\text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}^2[X_n] = 2 - 1 = 1$

3) Pour tout $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}.$$

4) La probabilité qu'il y ait au moins une rencontre vaut

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \, \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

ceci grâce au 3) et à la formule de Poincaré simplifiée.

→ Il en découle que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

5) L'égalité proposée est vraie pour $k=0$ et $k=n$ car $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}$.

→ Ensuite, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, il y a C_n^k possibilités de choisir exactement k boules portant leur numéro. Pour les $(n-k)$ autres boules, il y a exactement

$$(n-k)! \, \mathbb{P}(X_{n-k} = 0)$$

possibilités qu'il n'y ait aucune rencontre. Par conséquent, on tire du 4) que

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{C_n^k (n-k)! \, \mathbb{P}(X_{n-k} = 0)}{n!} = \frac{1}{k!} \mathbb{P}(X_{n-k} = 0) = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}.$$

6) Pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} = \frac{1}{k!} e^{-1}$$

donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \sim \mathcal{P}(1)$.

PROBLÈME II

1) Soit h une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) f_{(U,V)}(u,v) \, du \, dv$$

$$= \mathbb{E}[h(\min(X,Y), X-Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(\min(x,y), x-y) \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{x \geq 0} \mathbb{1}_{y \geq 0} \, dx \, dy$$

→ On pose $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x\}$

→ On décompose $\mathbb{E}[h(U,V)] = I_1 + I_2$ avec

$$I_1 = \int_{\mathcal{D}_1} h(x, x-y)\,\lambda^2 \exp(-\lambda(x+y))\,dx\,dy, \quad I_2 = \int_{\mathcal{D}_2} h(y, x-y)\,\lambda^2 \exp(-\lambda(x+y))\,dx\,dy.$$

→ Pour I_1, on pose $\begin{cases} x = u \\ x-y = v \end{cases}$ tandis que pour I_2, $\begin{cases} y = u \\ x-y = v \end{cases}$.

On obtient alors

$$I_1 = \int_{\Delta_1} h(u,v)\,\lambda^2 \exp(-\lambda(2u-v))\,du\,dv, \quad I_2 = \int_{\Delta_2} h(u,v)\,\lambda^2 \exp(-\lambda(2u+v))\,du\,dv$$

avec $\Delta_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0 \text{ et } v \leq 0\}$, $\Delta_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0 \text{ et } v \geq 0\}$.

→ Finalement,

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\,\lambda^2 \exp(-2\lambda u) \exp(-\lambda|v|)\,\mathbb{1}_{u \geq 0}\,du\,dv$$

ce qui entraîne

$$f_{(U,V)}(u,v) = \lambda^2 \exp(-2\lambda u) \exp(-\lambda|v|)\,\mathbb{1}_{u \geq 0}.$$

2) On a $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,dv = 2\lambda \exp(-2\lambda u)\,\mathbb{1}_{u \geq 0}$, $U \sim \mathcal{E}(2\lambda)$.

→ De même, $f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,du = \dfrac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|v|)$, V suit la loi exponentielle symétrique de paramètre λ appelée loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

3) Il est clair que U et V sont indépendantes car $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) f_V(v).$$

4) Si $W = |X-Y|$, on a pour tout $w \geq 0$,

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(|X-Y| \leq w) = \mathbb{P}(-w \leq X-Y \leq w) = \mathbb{P}(-w \leq V \leq w)$$

$$= \int_{-w}^{w} f_V(v)\,dv = \int_{-w}^{w} \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|v|)\,dv = \int_{-w}^{0} \frac{\lambda}{2} \exp(\lambda v)\,dv + \int_{0}^{w} \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda v)\,dv$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \exp(-\lambda w)) + \frac{1}{2}(-\exp(-\lambda w) + 1) = 1 - \exp(-\lambda w).$$

→ Si $w \leq 0$, $F_W(w) = 0$. On a $f_W(w) = \lambda \exp(-\lambda w)\,\mathbb{1}_{w \geq 0}$ donc

$$W \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

PROBLÈME III

1) On a $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[X_k]}{k} = m \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = m L_n$ où

→ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. De plus,

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{k^2} = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

2) $\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\log n} - m\right)^2\right] = \frac{1}{(\log n)^2} \mathbb{E}\left[(S_n - m\log n)^2\right] = \frac{1}{(\log n)^2} \mathbb{E}\left[(S_n - \mathbb{E}[S_n] + \mathbb{E}[S_n] - m\log n)^2\right]$

$$= \frac{1}{(\log n)^2} \mathbb{E}\left[(S_n - \mathbb{E}[S_n])^2\right] + \frac{1}{(\log n)^2}\left(\mathbb{E}[S_n] - m\log n\right)^2$$

$$= \frac{1}{(\log n)^2} \mathrm{Var}(S_n) + \left(\frac{\mathbb{E}[S_n]}{\log n} - m\right)^2.$$

3) $\mathrm{Var}(S_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2 \pi^2}{6}$ ce qui entraine $\mathrm{Var}(S_n) < +\infty$.

→ De plus, on a par l'indication

$$\left(\frac{\mathbb{E}[S_n]}{\log n} - m\right)^2 = m^2\left(\frac{L_n}{\log n} - 1\right)^2 = m^2\left(\frac{\gamma}{\log n} + O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)^2 = O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right).$$

→ On tire du 2) que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\log n} - m\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right).$$

4) Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on a par l'inégalité de Markov et le 3)

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\log n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\log n} - m\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right).$$

→ On peut conclure que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\log n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ donc

$$\frac{S_n}{\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m.$$