UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Le 09/03/2009

LICENCE L3

PARTIEL DE PROBABILITÉS
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $X(\Omega)=\{1,-1\}$ et $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(U\leq p)=p$ donc

$\longrightarrow$ $\mathbb{P}(X=-1)=1-p$ et $X\sim\mathcal{R}(p)$.

2) Pour tout $y\in\mathbb{R}$, on a

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\leq y)=\mathbb{P}(Y\leq y \text{ et } \varepsilon=1)+\mathbb{P}(Y\leq y \text{ et } \varepsilon=-1)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(Y\leq y\,|\,\varepsilon=1)+\mathbb{P}(Y\leq y\,|\,\varepsilon=-1)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(-\log V\leq \lambda y)+\mathbb{P}(\log V\leq \lambda y)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\mathbb{P}(V\leq \exp(-\lambda y))+\mathbb{P}(V\leq \exp(\lambda y))\right)$$

$\to$ Si $y\geq 0$, $\mathbb{P}(V\leq \exp(\lambda y))=1$ et $\mathbb{P}(V\leq \exp(-\lambda y))=\exp(-\lambda y)$.

$\to$ Si $y\leq 0$, $\mathbb{P}(V\leq \exp(\lambda y))=\exp(\lambda y)$ et $\mathbb{P}(V\leq \exp(-\lambda y))=1$.

$\to$ Par suite, $F_Y(y)=\frac{1}{2}(2-\exp(-\lambda y))$ si $y\geq 0$ et $F_Y(y)=\frac{1}{2}\exp(\lambda y)$ si $y\leq 0$. Par dérivation, $f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|y|)$ donc $Y\sim\mathcal{L}(\lambda)$.

3) On a $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}([\log(U)/\log(1-p)]=k-1)=\mathbb{P}(k-1\leq \log U/\log(1-p)<k)$$
$$=\mathbb{P}(k\log(1-p)<\log U\leq (k-1)\log(1-p))=\mathbb{P}((1-p)^k<U\leq (1-p)^{k-1})$$
$$=(1-p)^{k-1}-(1-p)^k=p(1-p)^{k-1}$$ donc $Z\sim\mathcal{G}(p)$.

PROBLÈME II

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = 0$ si $x < \theta$ et, si $x \geqslant \theta$,

$\rightarrow F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\theta \exp(Y) \leq x) = \mathbb{P}(\exp(Y) \leq \frac{x}{\theta})$

$= \mathbb{P}(Y \leq \log(\frac{x}{\theta})) = F_Y(\log(\frac{x}{\theta}))$.

$\rightarrow$ Cependant, comme $Y \sim \mathcal{E}(a)$, on a $F_Y(y) = 0$ si $y \leqslant 0$ et $F_Y(y) = 1 - \exp(-ay)$ si $y \geqslant 0$. Par suite, si $x \geqslant \theta$,

$$F_X(x) = 1 - \exp(-a \log(\frac{x}{\theta})) = 1 - (\frac{\theta}{x})^a.$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_{\hat{\theta}_n}(x) = 0$ si $x < \theta$ et, si $x \geqslant \theta$,

$\rightarrow F_{\hat{\theta}_n}(x) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\hat{\theta}_n > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x)$

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X_k \leq x))$

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_X(x)) = 1 - (\frac{\theta}{x})^{na}$

$\rightarrow$ On en déduit que $\hat{\theta}_n \sim \mathcal{P}(na, \theta)$.

3) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \geqslant \theta + \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(\hat{\theta}_n < \theta + \varepsilon)$

$= 1 - F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \varepsilon) = (\frac{\theta}{\theta + \varepsilon})^{na} = b^n$

avec $b = (\frac{\theta}{\theta+\varepsilon})^a$. Comme $0 < b < 1$, il en découle que $\forall \varepsilon > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n = \frac{b}{1-b} < +\infty$ donc $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ p.s.

4) Si $V_n = n(\hat{\theta}_n - \theta)$, on tire du 1) et du 2) que $F_{V_n}(x) = 0$ si $x < 0$

$\rightarrow$ et, si $x \geqslant 0$, $F_{V_n}(x) = \mathbb{P}(V_n \leq x) = \mathbb{P}(n(\hat{\theta}_n - \theta) \leq x)$ donc

$F_{V_n}(x) = F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \frac{x}{n}) = 1 - (\frac{\theta}{\theta + \frac{x}{n}})^{na} = 1 - (1 - \frac{x}{n(\theta + \frac{x}{n})})^{na}$

$\lim_{n \to +\infty} F_{V_n}(x) = 1 - \exp(-\frac{a}{\theta} x)$ donc $n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ où $Z \sim \mathcal{E}(\frac{a}{\theta})$.

PROBLÈME III

1) Soit h une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a

→ $\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) f_{(U,V)}(u,v)\,du\,dv$

$= \mathbb{E}\left[h\left(X+Y, \frac{X+Y}{Y}\right)\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} h\left(x+y, \frac{x+y}{y}\right) e^{-x} e^{-y} \mathbb{1}_{x\geq 0} \mathbb{1}_{y>0}\,dx\,dy$

→ On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = \dfrac{x+y}{y}. \end{cases}$$

→ On a $\begin{cases} u = x+y \\ v = \dfrac{x+y}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u-y \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u\left(1-\dfrac{1}{v}\right) \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{v} & \frac{u}{v^2} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{v^2}$$

→ Il en découle que $\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) \frac{u}{v^2} e^{-u} \mathbb{1}_{u\geq 0} \mathbb{1}_{v\geq 1}\,du\,dv$.

Finalement, on a $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{u}{v^2} \exp(-u) \mathbb{1}_{u\geq 0} \mathbb{1}_{v\geq 1}$.

2) $\forall u \geq 0$, $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,dv = u\exp(-u) \int_1^{+\infty} \frac{1}{v^2}\,dv = u\exp(-u)\left[-\frac{1}{v}\right]_1^{+\infty}$

→ donc $f_U(u) = u\exp(-u)$. Par suite, $f_U(u) = u\exp(-u)\mathbb{1}_{u\geq 0}$.

→ U suit la loi Gamma $G(2,1)$. De même, $\forall v \geq 1$,

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,du = \frac{1}{v^2}\int_0^{+\infty} u\exp(-u)\,du = \frac{1}{v^2}$$

donc $f_V(v) = \frac{1}{v^2}\mathbb{1}_{v\geq 1}$. On peut déduire du problème II que $V \sim \mathcal{P}(1,1)$.

3) Il est clair que U et V sont indépendantes car

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) f_V(v).$$

4) Si $W = \theta V^{1/a}$, on a $F_W(w) = 0$ si $w < \theta$ et, si $w \geq \theta$

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(\theta V^{1/a} \leq w)$$
$$= \mathbb{P}\left(V \leq \left(\frac{w}{\theta}\right)^a\right) = F_V\left(\left(\frac{w}{\theta}\right)^a\right).$$

→ Cependant, on a

$$F_V(v) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{v} & \text{si } v \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

→ Finalement,

$$F_W(w) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta}{w}\right)^a & \text{si } w \geq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui entraine via le problème II que $W \sim \mathcal{P}(a, \theta)$.