UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Le 01/03/2010 ①
LICENCE L3

PARTIEL DE PROBABILITÉS
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $A = XZ - Y^2$ et $B = X + Z$. Tout d'abord, il est clair que

→ $A(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $B(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On a ensuite,

$$\mathbb{P}(A=1) = \mathbb{P}(XZ=1 \text{ et } Y^2=0) = \mathbb{P}(X=1, Y=0, Z=1)$$
$$= \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0)\,\mathbb{P}(Z=1) = p^2(1-p).$$

→ $\mathbb{P}(A=-1) = \mathbb{P}(XZ=0 \text{ et } Y=1) = \mathbb{P}(XZ=0)\,\mathbb{P}(Y=1)$
$$= p\,\mathbb{P}(XZ=0) = p(1 - \mathbb{P}(XZ\neq 0))$$
$$= p(1 - \mathbb{P}(XZ=1)) = p(1-p^2).$$

→ Enfin, $\mathbb{P}(A=0) = 1 - \mathbb{P}(A=1) - \mathbb{P}(A=-1) = 1 - p(1-p)(1+2p)$.

→ On a $B \sim \mathcal{B}(2,p)$ donc $\mathbb{P}(B=0) = (1-p)^2$, $\mathbb{P}(B=1) = 2p(1-p)$, $\mathbb{P}(B=2) = p^2$.

2) $\mathbb{E}[A] = p^2(1-p) - p(1-p^2) = -p(1-p)$, $\mathbb{E}[A^2] = p(1+p-2p^2)$ donc

→ $Var(A) = p - p^4 = p(1-p^3)$. De plus, $\mathbb{E}[B] = 2p$, $Var(B) = 2p(1-p)$.

3) Il est clair que A et B ne sont pas indépendantes car

→ $\mathbb{P}(A=1 \text{ et } B=0) = \mathbb{P}(X=1, Y=0, Z=1 \text{ et } X=0, Z=0) = 0$ et donc

$\mathbb{P}(A=1 \text{ et } B=0) \neq \mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=0)$.

PROBLÈME II

1) L'application h est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{D}$ sur Δ car pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$ et $(u,v)\in\Delta$

$$h(x,y)=(u,v) \iff \begin{cases} u=\frac{x+y}{2} \\ v=\frac{x-y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases} \iff h^{-1}(u,v)=(u+v,u-v).$$

→ Le jacobien de h^{-1} vaut -2, il ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$.

2) La densité du couple (U,V) est donnée, $\forall (u,v)\in\Delta$, par

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}(h^{-1}(u,v))\,|J_h(h^{-1}(u,v))|^{-1} \\ &= f_{X,Y}(h^{-1}(u,v))\,|J_{h^{-1}}(u,v)| = \frac{2}{4a^2}\mathbb{1}_{(u,v)\in\Delta} \\ &= \frac{1}{2a^2}\mathbb{1}_{|u|\leq a}\mathbb{1}_{|v|\leq a-|u|} \end{aligned}$$

3) La loi marginale de U est donnée par $f_U(u)=\int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,dv$

→ $f_U(u)=\frac{1}{2a^2}\mathbb{1}_{|u|\leq a}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{|v|\leq a-|u|}\,dv=\frac{1}{a^2}(a-|u|)\mathbb{1}_{|u|\leq a}$. Par suite, $U\sim T(a)$. De même,

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,du = \frac{1}{2a^2}\mathbb{1}_{|v|\leq a}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{|u|\leq a-|v|}\,dv \\ &= \frac{1}{a^2}(a-|v|)\mathbb{1}_{|v|\leq a} \text{ donc } V\sim T(a). \end{aligned}$$

4) Il est clair que U et V ne sont pas indépendantes car Δ est un losange ou bien encore, car $f_{U,V}(u,v)\neq f_U(u)f_V(v)$.

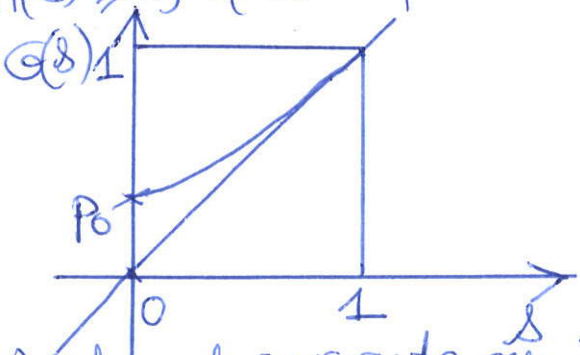
PROBLÈME III

1) Par la formule d'Hadamard, G est la somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1 donc G est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$. On a pour tout $s \in [0,1[$

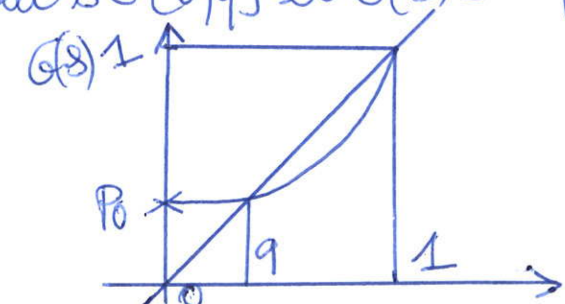
$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k \quad \text{et} \quad G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} p_k .$$

Comme $0<p_0<1$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k > 0$ donc $\forall s \in]0,1[$, $G'(s)>0$, G est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $p_0+p_1<1$, $\sum_{k=2}^{\infty} p_k>0$ donc $\forall s \in]0,1[$ $G''(s)>0$, G est strictement convexe sur $[0,1]$. On a $G(0)=p_0>0$ et $G(1)=1$. De plus, $G'(1)=m$. Soit H la fonction définie $\forall s \in [0,1]$, par $H(s)=G(s)-s$. H est strictement convexe. De plus, $H(0)=p_0$, $H(1)=0$ et $H'(1)=m-1$.

Si $m \leq 1$, H' est strictement croissante sur $[0,1]$ et comme $H'(1)=m-1 \leq 0$, $H' \leq 0$, H est décroissante sur $[0,1]$ et $H(1)=0$ donc $H(s) \geq 0$, $G(s) \geq s$ pour tout $s \in [0,1]$.



Si $m>1$, H' est strictement croissante sur $[0,1]$ et comme $H'(0)=p_1-1$, $H'(1)=m-1>0$, on peut via le théorème de la valeur intermédiaire trouver une valeur q telle que $H(q)=G(q)-q=0$ avec $0<q<1$, H est décroissante sur $[0,q]$, H est croissante sur $[q,1]$ donc $G(s) \geq s$ pour tout $s \in [0,q]$ et $G(s) \leq s$ pour tout $s \in [q,1]$



2) Tout d'abord, $X_0 = 1$ donc pour tout $s \in [0,1]$, $G_0(s) = s$.

→ Ensuite, $X_1 = Y_{1,1}$ donc pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_1(s) = \mathbb{E}[s^{X_1}] = \mathbb{E}[s^{Y}] = G(s) = G(G_0(s)) = G_0(G(s)).$$

→ De plus, on a par la formule des probabilités totales que, pour tout $n \geq 0$ et $j \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{i} Y_{n,k} = j \mid X_n = i\Big)\, \mathbb{P}(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_i = j)\, \mathbb{P}(X_n = i)
\end{aligned}$$

avec $Z_i = \sum_{k=1}^{i} Y_{n,k}$. On déduit alors du théorème de Fubini que pour tout $n \geq 0$ et $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} s^j\, \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_i = j)\, \mathbb{P}(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s^j\, \mathbb{P}(Z_i = j)\, \mathbb{P}(X_n = i).
\end{aligned}$$

→ Cependant,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} s^j\, \mathbb{P}(Z_i = j) &= \mathbb{E}[s^{Z_i}] = \mathbb{E}\big[s^{\sum_{k=1}^{i} Y_{n,k}}\big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{i} s^{Y_{n,k}}\Big] = \prod_{k=1}^{i} \mathbb{E}[s^{Y_{n,k}}] = \prod_{k=1}^{i} \mathbb{E}[s^{Y}] \\
&= (G(s))^i
\end{aligned}$$

→ Finalement, pour tout $n \geq 0$ et $s \in [0,1]$,

$$G_{n+1}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (G(s))^i\, \mathbb{P}(X_n = i) = G_n(G(s)).$$

→ Il est immédiat par récurrence sur $n \geq 0$ que $\forall s \in [0,1]$

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) = G(G_n(s)) = G \circ G \circ \dots \circ G(s).$$

3) On a $G_n(0) = \mathbb{P}(X_n = 0) = q_n$. On déduit du 2) que

→ $q_{n+1}(0) = G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(q_n)$ avec $q_0 = G_0(0) = 0$.

→ La suite (q_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers q, racine de l'équation $G(s) = s$ avec $s \in [0,1]$.

4) Finalement, on déduit du 1) que si $m \leq 1$, $q = 1$ et la population s'éteint p.s. tandis que si $m > 1$, $0 < q < 1$ ce qui

→ entraine $p_0 < q < 1$ car G est strictement croissante, $G(0) = p_0$, $G(1) = 1$.