UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 **Le 21/04/2008**
LICENCE L3

EXAMEN
PROBABILITÉS

Durée 3h

PROBLÈME I

3 points

La loi de Weibull intervient en fiabilité pour modéliser les durées de vie. On dit que Y suit la loi de Weibull $\mathcal{W}(a, \lambda)$ avec $a > 0$ et $\lambda > 0$ si $Y = X^{1/a}$ où X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. La loi de Weibull $\mathcal{W}(1, \lambda)$ correspond donc à la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1) Déterminer la fonction de répartition puis la densité de probabilité de Y.

2) En déduire, via la méthode d'inversion, une façon de générer une réalisation de Y à partir de la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

PROBLÈME II

5 points

Si X est une variable aléatoire positive, on va montrer l'inégalité de Paley-Zygmund qui nous apprend que pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$\mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X]) \geq (1-t)^2 \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

1) Montrer que pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$(1-t)\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X \mathrm{I}_{\{X \geq t\mathbb{E}[X]\}}].$$

2) Montrer ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$(\mathbb{E}[X \mathrm{I}_{\{X \geq t\mathbb{E}[X]\}}])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\, \mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X]).$$

3) En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund.

4) Si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, montrer que pour tout $0 \leq a \leq 1/\lambda$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \geq \frac{1}{2}(1 - a\lambda)^2.$$

PROBLÈME III

6 points

La durée de vie d'une batterie d'un ordinateur portable peut être modélisée par une variable aléatoire positive X de densité de probabilité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\theta^a}(\theta - x)^{a-1} & \text{si } \ 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $a > 0$ et $\theta > 0$. On peut noter que si $a = 1$, X suit la loi uniforme sur $[0, \theta]$. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, on estime θ par

$$\widehat{\theta}_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

1) Déterminer la fonction de répartition de X

2) Calculer la fonction de répartition puis la densité de probabilité de $\widehat{\theta}_n$.

3) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ.

4) Montrer également que

$$n^{1/a}\Big(\theta - \widehat{\theta}_n\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$$

où Y suit la loi de Weibull $\mathcal{W}(a, \lambda)$ rencontrée plus haut avec $\lambda > 0$ à déterminer.

PROBLÈME IV

4 points

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Determiner, si elle existe, la densité de probabilité du couple aléatoire (X_1, S_n).

2) Pour $n \geq 2$, montrer que la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n est la loi

$$\mathcal{N}\Big(\frac{S_n}{n}, \frac{\sigma^2(n-1)}{n}\Big).$$

3) En déduire l'espérance conditionnelle de X_1 sachant S_n.

PROBLÈME V

2 points

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 = 1$. On pose

$$U = aX - bZ, \qquad V = cY, \qquad W = bX + aZ.$$

Montrer que les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et calculer $\mathbb{E}[U|X]$ et $\mathbb{E}[X|U]$.