UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 **Le 09/03/2009**
LICENCE L3

PARTIEL
PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

6 points

Il est facile de générer des variables aléatoires à partir de la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ la partie entière de x, tandis que pour tout événement A, I_A désigne la fonction indicatrice de A. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Si $X = 2\mathrm{I}_{(U \leq p)} - 1$ avec $0 < p < 1$, montrer que X suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ donnée par
$$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=-1) = 1-p.$$

2) Si $\varepsilon = 2\mathrm{I}_{(U \leq 1/2)} - 1$ et si $Y = -\varepsilon \ln(V)/\lambda$ avec $\lambda > 0$, montrer que Y suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ de densité de probabilité
$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|y|).$$

3) Si $Z = 1 + [\ln(U)/\ln(1-p)]$ avec $0 < p < 1$, montrer que Z suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ donnée, pour tout $k \geq 1$, par $\mathbb{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$.

PROBLÈME II

8 points

La loi de Paréto, encore appelée loi de puissance, est utilisée pour modéliser les dépassements d'un seuil. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(a,\theta)$ avec $a > 0$ et $\theta > 0$ si $X = \theta\exp(Y)$ où Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, on peut estimer la valeur θ par
$$\widehat{\theta}_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

1) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^a & \text{si } \; x \geq \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) Vérifier que $\widehat{\theta}_n$ suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(na, \theta)$.

3) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ.

4) Montrer également que

$$n\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

où Z suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ à déterminer.

PROBLÈME III

6 points

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Soient U et V les variables aléatoires réelles définies par

$$U = X + Y \qquad \text{et} \qquad V = \frac{X+Y}{Y}.$$

1) Montrer que la densité de probabilité du couple (U, V) est donnée par

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{u}{v^2} \exp(-u) \mathrm{I}_{\{u \geq 0\}} \mathrm{I}_{\{v \geq 1\}}.$$

2) En déduire les lois marginales de U et V.

3) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

4) Si $a > 0$ et $\theta > 0$, vérifier que $W = \theta V^{1/a}$ suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(a, \theta)$.