UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 **Le 01/03/2010**
LICENCE L3

PARTIEL
PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

6 points

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. On note A et B le déterminant et la trace de la matrice aléatoire

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les lois de probabilité de A et B.
2) Calculer les espérances et les variances de A et B.
3) Les variables aléatoires A et B sont-elles indépendantes ?

PROBLÈME II

8 points

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-a, a]$ avec $a > 0$. On pose

$$U = \frac{X+Y}{2} \qquad \text{et} \qquad V = \frac{X-Y}{2}.$$

1) Soient $\mathcal{D}$ le carré $[-a, a]^2$ et Δ le losange de base $[-a, a]$ et de hauteur $[-a, a]$. Soit h l'application de $\mathcal{D}$ dans Δ définie, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, par

$$h(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right).$$

Montrer que h est un difféomorphisme dont le jacobien ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$.

2) Calculer la densité de probabilité du couple (U, V).
3) Montrer que U et V suivent la loi triangulaire symétrique $\mathcal{T}(a)$ dont la densité est donnée par

$$f_W(w) = \frac{1}{a^2}(a - |w|)\mathrm{I}_{\{|w| \le a\}}.$$

4) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

PROBLÈME III

6 points

Le processus de Galton-Watson sert à modéliser la dynamique d'une population. On va étudier la probabilité q d'extinction de cette population. On part d'un unique ancêtre. Il peut donner naissance à $0, 1, 2, \cdots$ enfants qui constituent la première génération. Chaque individu de la première génération peut donner naissance à $0, 1, 2, \cdots$ enfants et l'ensemble de tous les descendants forme la seconde génération, etc. On étudie la variable aléatoire X_n représentant le nombre d'individus de la n^e génération. On a, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k}$$

avec $X_0 = 1$ où $Y_{n,k}$ correspond au nombre d'enfants du k^e individu de la n^e génération. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, $(Y_{n,k})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance m et de fonction génératrice G donnée, pour tout $s \in [-1, 1]$, par

$$G(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k \qquad \text{avec} \qquad p_k = \mathbb{P}(Y = k)$$

où $0 < p_0 < 1$ et $p_0 + p_1 < 1$. On suppose que, pour $n \geq 0$, $(Y_{n,k})$ est indépendante de X_n.

1) Vérifier que G est une fonction continue strictement convexe et croissante sur $[0, 1]$. Faire une représentation graphique de la restriction de G à $[0, 1]$ et de la première bissectrice dans le cas suivant $m \leq 1$ puis le cas $m > 1$.

2) Soit G_n la fonction génératrice de X_n. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $s \in [0, 1]$,

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) = G(G_n(s)).$$

3) Soit q_n la probabilité d'extinction à la n^e génération, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. En déduire que la suite (q_n) vérifie $q_{n+1} = G(q_n)$ avec $q_0 = 0$ et qu'elle converge vers une racine, notée q, de l'équation $G(s) = s$ avec $s \in [0, 1]$.

4) Conclure que si $m \leq 1$, la population s'éteint presque sûrement $q = 1$, tandis que si $m > 1$, sa probabilité d'extinction $p_0 < q < 1$.