Variables Aléatoires Discrètes et Continues

Exercice 1. La loi géométrique est utilisée pour modéliser le nombre aléatoire d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention d'un premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes de probabilité de succès p avec $0<p<1$. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ donnée, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$.

1) Déterminer la fonction génératrice associée à X.

2) En déduire l'espérance et la variance de X.

3) Montrer que X satisfait la propriété d'absence de mémoire i.e. pour tous $k,n\in\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X>k+n|X>n)=\mathbb{P}(X>k).$$

4) Inversement, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire. Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X>k)$ puis $\mathbb{P}(X=k)$ en fonction de $p=\mathbb{P}(X=1)$ et k puis conclure.

Exercice 2. Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Soit Y une variable aléatoire discrète indépendante de (Z_n) et soit

$$X=\sum_{k=1}^{Y} Z_k.$$

1) Si Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\pi)$, montrer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p\pi)$.

2) Si Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, montrer que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On appelle inverse généralisée de F, la fonction F^{-1} définie pour tout $y\in]0,1]$ par

$$F^{-1}(y)=\inf\{x\in\mathbb{R}\,/\,F(x)\geqslant y\}.$$

1) Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, montrer que la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ a même loi que X.

2) Si F est continue, montrer que $F(X)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 4. Il est facile de générer des variables aléatoires à partir de la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Si $X=-\log(U)/\lambda$ avec $\lambda>0$, montrer que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

2) Si $Y=[1+nU]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ où, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x, montrer que Y suit la loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1,2,\cdots,n\}$.

3) Si $Z=1+[\log(U)/\log(1-p)]$ avec $0<p<1$, montrer que Z suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

4) Si $S = c \times \tan(\pi(U - 1/2))$ avec $c > 0$, montrer que S suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$.

5) Si $T = -\log(-\log(U))$, montrer que T suit la loi de Gumbel.

Exercice 5. Une urne contient N boules de d couleurs dont N_1 de couleur $1, \dots, N_d$ boules de couleur d avec $d \geqslant 2$ et $N_1 + \cdots + N_d = N$. On effectue n tirages indépendants dans l'urne avec remise. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, soit X_i le nombre de boules de couleur i obtenues après tirage.

1) Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_d)$.

2) Calculer l'espérance et la matrice de covariance de X.

3) Déterminer la fonction génératrice de X.

4) En déduire que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, X_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$ avec $p_i = N_i/N$.

Exercice 6. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi Gamma $\mathcal{G}(a, \lambda)$ avec $a, \lambda > 0$, si sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} \exp(-\lambda x) \mathrm{I}_{(x \geqslant 0)}$$

avec

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \exp(-x)\, dx.$$

1) Calculer l'espérance et la variance de X.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et $\mathcal{G}(b, \lambda)$ avec $a, b, \lambda > 0$. Si

$$U = X + Y \qquad \text{et} \qquad V = \frac{X}{(X+Y)},$$

montrer que U et V sont indépendantes et trouver leurs lois marginales.

3) En déduire que

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

4) Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et trouver son espérance et sa variance.

5) Si $Z_1, ..., Z_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donner la loi du chi-deux à n degrés de liberté $T_n = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ et trouver son espérance et sa variance.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soient U et V les variables aléatoires réelles définies par

$$U = \min(X, Y) \qquad \text{et} \qquad V = X - Y.$$

1) Calculer la densité de probabilité du couple (U, V).

2) En déduire les lois marginales de U et V.

3) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

4) Déterminer la loi de $W = |X - Y|$.