UPS TOULOUSE III **MASTER 2**
2005/2006

TD II
AUTOUR DU PROCESSUS AUTORÉGRESSIF

1 Autorégressif.

On considère le processus autorégressif

$$X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$$

où l'état initial $X_0 = 0$ et où la suite (ε_n) satisfait $\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \sigma^2 > 0$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$. On suppose qu'il existe $a > 2$ tel que $\sup \mathbb{E}[|\varepsilon_{n+1}|^a|\mathcal{F}_n] < \infty$ p.s. On estime le paramètre inconnu θ par l'estimateur des moindres carrés

$$\widehat{\theta}_n = s_{n-1}^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1} \qquad \text{avec} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

1) Cas stable, $|\theta| < 1$. Montrer que $s_n/n \to \sigma^2/(1-\theta^2)$ p.s. En déduire que $\widehat{\theta}_n \to \theta$ p.s. et que l'on a le théorème limite centrale

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1-\theta^2),$$

la loi forte quadratique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \left(\widehat{\theta}_k - \theta\right)^2 = 1 - \theta^2 \qquad \text{p.s.}$$

et la loi du logarithme itéré

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2\log_2 n}\right)^{1/2} (\widehat{\theta}_n - \theta) = -\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2\log_2 n}\right)^{1/2} (\widehat{\theta}_n - \theta) = \sqrt{1-\theta^2} \qquad \text{p.s.}$$

2) Cas explosif, $|\theta| > 1$. Montrer que p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\theta^{2n}} = \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} Y^2 \qquad \text{avec} \qquad Y = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{-k} \varepsilon_k.$$

Vérifier que Y est non nulle p.s. et en déduire que $\widehat{\theta}_n \to \theta$ p.s. On se place maintenant dans le cadre gaussien où (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Montrer que

$$|\theta|^n (\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\theta^2 - 1)\mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}$ est une variable aléatoire de loi de Cauchy. Montrer également que

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\theta^{2n}}{2\log n}\right)^{1/2} (\widehat{\theta}_n - \theta) = -\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\theta^{2n}}{2\log n}\right)^{1/2} (\widehat{\theta}_n - \theta) = \frac{\sigma\sqrt{\theta^2 - 1}}{|Y|} \qquad \text{p.s.}$$

et la loi forte quadratique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\theta^k (\widehat{\theta}_k - \theta)\right)^2 = \frac{\sigma^2(\theta^2 - 1)}{Y^2} \qquad \text{p.s.}$$

3) Proposer un estimateur de σ^2 et étudier ses propriétés asymptotiques dans les cas stable et explosif.

2 Autorégressif à seuil.

On considère le processus autorégressif à seuil

$$X_{n+1} = \begin{cases} aX_n + \varepsilon_{n+1} & \text{si} \quad X_n \leq s \\ bX_n + \varepsilon_{n+1} & \text{si} \quad X_n > s \end{cases}$$

où $a, b, s \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$ et où (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note f et Φ la densité et la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On suppose enfin que l'état initial X_0 est indépendant de (ε_n).

1) Montrer que le processus (X_n) est stable i.e. qu'il existe une loi stationnaire μ telle que pour toute fonction $h \in C_b(\mathbb{R})$ avec $\mu(h) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\mu(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h(X_k) = \mu(h) \qquad \text{p.s.}$$

2) Montrer que $\sup\limits_{k\leq n} |X_k|^2 = O(\log n)$ p.s.

3) Montrer que μ est unique et possède des moments de tous ordres. Montrer également que μ a une densité h par rapport à la mesure de Lebesgue et que c'est l'unique densité solution de la relation

$$h(x) = \int_{-\infty}^{s} f(x - ay)h(y)\, dy + \int_{s}^{+\infty} f(x - by)h(y)\, dy.$$

4) Afin de résoudre cette relation, on suppose désormais que $s = 0$ et $b = -a$. Montrer que

$$h(x) = \Big(\frac{2(1 - a^2)}{\pi}\Big)^{1/2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(1 - a^2)x^2\Big)\Phi(-ax).$$

5) En déduire la moyenne et la variance de μ.

3 Gestion de stocks.

Le réapprovisionnement d'une boutique se fait au début de chaque semaine. En début de semaine, on représente par X_n l'état du stock. Il peut être complété par l'achat d'une quantité supplémentaire U_n. La demande pendant la semaine qui suit est une variable aléatoire positive D_{n+1} ce qui entraine la relation

$$X_{n+1} = \Big(X_n + U_n - D_{n+1}\Big)_+$$

On a donc vendu pendant la semaine $V_{n+1} = \inf(X_n + U_n, D_{n+1}) = X_n + U_n - X_{n+1}$ On suppose que (D_n) est une suite de variables aléatoires positives indépendantes et de même loi que D et que (X_0, U_0) est indépendant de (D_n). On note a le prix d'achat, v le prix de vente et c le coût d'entretien pendant une semaine d'une pièce du stock. Le gain moyen pendant n semaines est donc

$$G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (vV_k - aU_{k-1} - c(X_{k-1} + U_{k-1})).$$

On cherche à régler les achats afin d'optimiser ce gain moyen. On suppose que $v > a + c$. Pour un niveau $\ell > 0$ donné, on choisit, pour tout $n \geq 0$, la stratégie $X_n + U_n = \ell$.

1) Montrer que G_n converge p.s. vers $L(\ell) = (v - a - c)\ell - (v - a)\mathbb{E}[(\ell - D)_+]$.

2) Dans le cas particulier où D suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, calculer la limite $L(\ell)$. Si $v > a$, montrer que le niveau optimal est $\ell^* = 1/\lambda(\log(v - a) - \log(c))$.