UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
MASTER M1

le 13/01/2009 ①

EXAMEN SUR LES MARTINGALES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) Comme θ_{n+1} et ε_{n+1} sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}_n$,

$\to$ $\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\theta_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\theta_{n+1}]\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] = 0.$

$\to$ On peut le voir autrement. En effet, si $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_{n-1}, \varepsilon_n)$
on a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$ et $\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{G}_{n+1}] = \varepsilon_{n+1}\mathbb{E}[\theta_{n+1}|\mathcal{G}_{n+1}] = \varepsilon_{n+1}\mathbb{E}[\theta_{n+1}]$
donc $\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{G}_{n+1}] = \theta\varepsilon_{n+1}$. Par suite,

$$\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{G}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\theta\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$
$$= \theta\,\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \theta\,\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] = 0.$$

$\to$ De plus,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\theta_{n+1}X_n + \varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\theta_{n+1}X_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$
$$= X_n\,\mathbb{E}[\theta_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$
$$= X_n\,\mathbb{E}[\theta_{n+1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] = \theta X_n.$$

$\to$ Ensuite, on a $\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\theta_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\theta_{n+1}^2] = \tau^2$.
Il en découle que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\theta_{n+1}^2X_n^2 + 2X_n\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]$$
$$= X_n^2\,\mathbb{E}[\theta_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] + 2X_n\,\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]$$
$$= \tau^2X_n^2 + \sigma^2.$$

2) Si $Y_n = X_n^2/\tau^{2n}$, on a

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]}{\tau^{2(n+1)}} = \frac{\tau^2 X_n^2 + \sigma^2}{\tau^{2(n+1)}} = Y_n + \frac{\sigma^2}{\tau^{2(n+1)}} \geq Y_n$$

→ Par suite, comme $Y_0 = 0$, on a pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y_{n-1}] + \frac{\sigma^2}{\tau^{2n}} = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \tau^{-2k} = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} (\tau^{-2})^k$$

$$= \frac{\sigma^2}{\tau^2}\left(\frac{1-\tau^{-2n}}{1-\tau^{-2}}\right) = \left(\frac{\sigma^2}{\tau^2-1}\right)(1-\tau^{-2n}) \leq \frac{\sigma^2}{\tau^2-1}$$

→ On en déduit que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[Y_n] \leq \frac{\sigma^2}{\tau^2-1} < +\infty$. La suite (Y_n) est donc une sous-martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$.

3) Par le théorème de Doob, $Y_n \to Y$ p.s. avec Y intégrable.

4) On peut alors déduire du lemme de Toeplitz que

$$\frac{1}{\tau^{2n}} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \frac{1}{\tau^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \tau^{2k} Y_k \longrightarrow \left(\frac{\tau^2}{\tau^2-1}\right) Y \quad \text{p.s.}$$

Car $Y_n \to Y$ p.s. et $\sum_{k=1}^{n} \tau^{2k} = \left(\frac{\tau^2}{\tau^2-1}\right)(\tau^{2n}-1) \sim \left(\frac{\tau^2}{\tau^2-1}\right)\tau^{2n}$.

5) La suite (ε_n^2) est une suite de variables aléatoires indépendantes
→ et de même loi intégrable avec $\mathbb{E}[\varepsilon_n^2] = \tau^2$. On a donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 \longrightarrow \tau^2 \quad \text{p.s.}$$

6) On a

$$\hat{\theta}_n - \theta = \frac{A_n}{B_n} - \theta = \frac{A_n - \theta B_n}{B_n} = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1} - \theta X_{k-1}^2$$

$$= \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}(\theta X_{k-1} + \varepsilon_k) - \theta X_{k-1}^2 = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}\varepsilon_k + X_{k-1}^2(\theta_k - \theta).$$

7) On tire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}\varepsilon_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2$$

→ Cependant, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 \to \sigma^2$ et $\frac{1}{\tau^{2n}} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to \left(\frac{\tau^2}{\tau^2-1}\right) Y$ p.s.

donc $\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}\varepsilon_k\right)^2 = O(n\tau^{2n})$, $N_n^2 = O(n\tau^{2n})$ donc $N_n = o(\tau^{2n})$ p.s.

$\rightarrow$ On tire du 4) que $\frac{B_n}{\tau^{2n}} \longrightarrow \frac{Y}{\tau^2-1}$ p.s. ce qui implique ③
$N_n = o(B_n)$ p.s. Par suite, si $\hat{\theta}_n \to \theta$ p.s. alors

$$V_n = \frac{1}{\tau^{2n}} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 (\theta_k - \theta) \longrightarrow 0 \quad \text{p.s.}$$

$\rightarrow$ Cependant, $\tau^{2n} V_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2(\theta_k - \theta) = \tau^{2(n-1)} V_{n-1} + X_{n-1}^2(\theta_n - \theta)$ donc en divisant par $\tau^{2(n-1)}$,

$$\tau^2 V_n = V_{n-1} + Y_{n-1}(\theta_n - \theta)$$

$\rightarrow$ Comme $V_n \to 0$ p.s., il en découle que $\theta_n \to \theta$ p.s. car $Y \neq 0$ p.s.
Par suite, $\theta_n^2 \to \theta^2$ p.s.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \theta_k^2 \longrightarrow \theta^2 \quad \text{p.s.}$$

ce qui entraine via le 5) que $\theta^2 = \tau^2$ ce qui est absurde car $\tau^2 > \theta^2$.
$\rightarrow$ On peut conclure que $\hat{\theta}_n \not\to \theta$ p.s.

8) On a comme au 6)

$$\tilde{\theta}_n - \theta = \frac{C_n}{D_n} - \theta = \frac{C_n - \theta D_n}{D_n} = \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} X_{k-1} (X_k - \theta X_{k-1}),$$
$$= \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} X_{k-1} (\varepsilon_k + (\theta_k - \theta) X_{k-1}),$$
$$= \frac{M_n}{D_n}.$$

9) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(1-|x|)^2 = 1 + x^2 - 2|x| \geq 0$ donc $1 + x^2 \geq 2|x|$.
$\rightarrow$ On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $a_n |X_n| \leq 1/2$. On a également $a_n X_n^2 \leq 1$. Par suite, pour tout $n \geq 1$,

$$|M_n| \leq \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} |X_{k-1}| \left(|\varepsilon_k| + |X_{k-1}| \, |\theta_k - \theta| \right)$$
$$\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k| + \sum_{k=1}^{n} |\theta_k - \theta| \leq \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k| + \sum_{k=1}^{n} |\theta_k - \theta|$$

$$M_n^2 \leq 2\left(\sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k|\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} |\theta_k - \theta|\right)^2 \leq 2n \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\theta_k - \theta)^2 \right)$$

$\mathbb{E}[M_n^2] \leq 2n^2(\sigma^2 + \tau^2)$ donc (M_n) est de carré intégrable.

→ De plus,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_n + a_n X_n \varepsilon_{n+1} + a_n X_n^2(\theta_{n+1}-\theta)|\mathcal{F}_n]$$
$$= M_n + a_n X_n \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] + a_n X_n^2 \mathbb{E}[\theta_{n+1}-\theta|\mathcal{F}_n]$$
$$= M_n + a_n X_n \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] + a_n X_n^2(\mathbb{E}[\theta_{n+1}]-\theta) = M_n$$

→ La suite (M_n) est donc une martingale de carré intégrable.

→ Si $\ell = \mathbb{E}[(\theta_n-\theta)^2] = \tau^2-\theta^2$, on a

$$\mathbb{E}[(M_{n+1}-M_n)^2|\mathcal{F}_n] = a_n^2 X_n^2 \sigma^2 + a_n^2 X_n^4 \ell$$

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k-M_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 X_{k-1}^2 + \ell \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 X_{k-1}^4$$

→ On en déduit aisément que $\langle M\rangle_n \leq (\sigma^2+\ell)n$ donc $\langle M\rangle_n = O(n)$ p.s.

→ Par le 2), $a_n X_n^2 \to 1$ p.s. donc $\frac{1}{n}D_n \to 1$ p.s. La loi des grands nombres pour les martingales entraine alors que

$M_n = o(n)$ p.s. donc $M_n = o(D_n)$ p.s. et par le 8)

$$\tilde{\theta}_n \to \theta \text{ p.s.}$$

10) Il est clair que $\frac{\langle M\rangle_n}{n} \to \ell$ p.s. Afin d'utiliser le

→ théorème limite centrale, il suffit de vérifier la condition de Lindeberg : $\forall \varepsilon>0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|\Delta M_k|^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k|\geq \varepsilon\sqrt{n}}|\mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

avec $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. Mais, on a vu que

$$|\Delta M_{n+1}| \leq |\varepsilon_{n+1}| + |\theta_{n+1}-\theta|$$
$$(\Delta M_{n+1})^4 \leq 8(\varepsilon_{n+1}^4 + (\theta_{n+1}-\theta)^4)$$

→ Par suite, $\mathbb{E}[(\Delta M_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] \leq 8\,\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^4] + 8\,\mathbb{E}[(\theta_{n+1}-\theta)^4] \leq 8\lambda^4 + 64(\lambda^4+\theta^4)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|\Delta M_k|^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k|\geq\varepsilon\sqrt{n}}|\mathcal{F}_{k-1}] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^4|\mathcal{F}_{k-1}] = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

→ La condition de Lindeberg est satisfaite donc si $\ell = \tau^2-\theta^2$

$$\frac{M_n}{\sqrt{\langle M\rangle_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1), \quad \frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\ell), \quad \sqrt{n}(\tilde{\theta}_n-\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\ell).$$