UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
MASTER M1, 2009/2010

le 23/04/2010

EXAMEN SUR LES MARTINGALES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $\log \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \log(1+\theta\gamma_k)$ et $\log\beta_n \geq 0$. De plus, $\forall x \geq 0$ $\rightarrow \log(1+x) \leq x$ donc $\log\beta_n \leq \theta \sum_{k=0}^{n} \gamma_k$. Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < +\infty$$

la suite $(\log\beta_n)$ est positive, croissante et majorée donc elle converge ce qui implique que (β_n) converge. Il en découle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{\beta_n}\right)^2 < +\infty$$

car $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty$ puisque $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

2) Soit $Z_n = X_n - x^*$. On a $Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n(Y_{n+1} - \alpha)$ donc

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n(\theta X_n + \varepsilon_{n+1} - \alpha) = Z_n + \gamma_n(\theta Z_n + \theta x^* + \varepsilon_{n+1} - \alpha)$$
$$= \alpha_n Z_n + \gamma_n(\varepsilon_{n+1} + \delta)$$

avec $\alpha_n = 1 + \theta\gamma_n$ et $\delta = \theta x^* - \alpha = 0$. Par suite,

$$Z_{n+1} = \alpha_n Z_n + \gamma_n \varepsilon_{n+1} = \alpha_n \alpha_{n-1} Z_{n-1} + \gamma_n \varepsilon_{n+1} + \alpha_n \gamma_{n-1} \varepsilon_n$$
$$= \beta_n Z_0 + \beta_n M_{n+1}$$

avec $\beta_n = \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_0$ et $M_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{\beta_k} \varepsilon_{k+1}$.

3) On a $\mathbb{E}[M_n]=0$ et $\mathbb{E}[M_n^2]=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)^2$. Par suite

$$\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}[M_n^2]\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma_n}{\beta_n}\right)^2<+\infty$$

→ (M_n) est bornée dans $\mathbb{L}^2$. C'est une martingale car $\forall n\geq 0$, $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[M_n+\frac{\gamma_n}{\beta_n}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n]$

$$= M_n+\frac{\gamma_n}{\beta_n}\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

$$= M_n+\frac{\gamma_n}{\beta_n}\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] = M_n.$$

4) Il découle du théorème de Doob que (M_n) converge p.s. → et dans $\mathbb{L}^2$ vers une v.a de carré intégrable M. Cependant, M_n est une somme de v.a. gaussiennes indépendantes, $M_n\sim N\left(0,\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)^2\right)$ donc $M\sim N\left(0,\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)^2\right)$.

5) Si $\beta=\lim_{n\to+\infty}\beta_n$, on déduit du 2) et du 4) que

$$\lim_{n\to+\infty}X_n=\Lambda=x^*+L \quad \text{p.s.}$$

→ avec $L=\beta(X_0-x^*+M)$. On a $\mathbb{E}[L]=\beta(X_0-x^*)$ car $\mathbb{E}[M]=0$ et $Var(L)=\beta^2 Var(M)=\beta^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)^2$. Par suite,

$$L\sim N(m,\sigma^2)$$

avec $m=\beta(X_0-x^*)$ et $\sigma^2=\beta^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)^2$.

→ Comme L est non nulle p.s., $X_n\not\to x^*$ p.s. On peut conclure que l'hypothèse $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n=+\infty$ est nécessaire pour avoir la convergence p.s. vers x^*.

PROBLÈME II

1) Si $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, on a $\mathbb{E}[X] = 0$ car la loi
$\rightarrow$ de Laplace est symétrique. De plus,

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{2} x^2 \exp(-\lambda|x|)dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$\rightarrow$ On intègre par parties,

$$\mathbb{E}[X^2] = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$= 2\left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$\rightarrow$ De même, $\mathbb{E}[X^4] = \lambda \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\lambda x} dx = \frac{12}{\lambda^2}\mathbb{E}[X^2] = \frac{24}{\lambda^4}$.

2) On a $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} k^a \varepsilon_k$. On déduit de l'inégalité
$\rightarrow$ de Cauchy-Schwarz que

$$M_n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} k^{2a} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 \leq n^{2a+1} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2$$

Par suite, $\mathbb{E}[M_n^2] \leq \frac{2}{\lambda^2} n^{2a+2}$ donc (M_n) est de carré intégrable.
$\rightarrow$ De plus, $\Delta M_{n+1} = M_{n+1} - M_n = X_{n+1} = (n+1)^a \varepsilon_{n+1}$ donc

$$\mathbb{E}[\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (n+1)^a \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (n+1)^a \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] = 0$$

par le 1). La suite (M_n) est donc une martingale.

3) On a

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[k^{2a} \varepsilon_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} k^{2a} \mathbb{E}[\varepsilon_k^2]$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} v_n \text{ avec } v_n = \sum_{k=1}^{n} k^{2a}.$$

→ Comme $v_n \sim \frac{1}{2a+1} n^{2a+1}$, il en découle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle M\rangle_n}{n^{2a+1}} = \frac{2}{\lambda^2(2a+1)}.$$

4) Il est clair que $\langle M\rangle_n \to +\infty$. On déduit de la LGN pour
→ les martingales que

$$\frac{M_n}{\langle M\rangle_n} \to 0 \text{ p.s.}$$

→ Le 3) entraine alors que $\frac{M_n}{n^{2a+1}} \to 0$ p.s.

5) Il est facile de voir que la condition de Lindeberg
→ est satisfaite, à savoir que, $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon\sqrt{a_n}} | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{P} 0$$

avec $a_n = n^{2a+1}$. En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} k^{4a} \mathbb{E}[\varepsilon_k^4]$$

$$= \frac{24}{\lambda^4}\sum_{k=1}^{n} k^{4a} \leq \frac{24 n^{4a+1}}{\lambda^4}.$$

→ Par suite,

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon\sqrt{a_n}} | \mathcal{F}_{k-1}] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 a_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}]$$

$$\leq \frac{a_n^2}{n\varepsilon^2 a_n^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n}$$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon\sqrt{a_n}} | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{P} 0$$

→ Le TLC pour les martingales entraine alors que

$$\frac{M_n}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2), \quad \frac{M_n}{n^a\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\sigma^2)$$

avec $\sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2(2a+1)}$.