UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
MASTER 1, 2008/2009

Le 21/11/2008

PARTIEL SUR LES MARTINGALES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $X_n = a\sum_{k=0}^{n-1} Y_k \leq na$. De plus, $\exp(at) \geq 1$
→ $p\exp(at) + 1-p \geq p+1-p = 1$ donc, pour tout $t \geq 0$

$$M_n(t) \leq \exp(nat).$$

→ On en déduit que $(M_n(t))$ est intégrable. De plus, on a

$$M_{n+1}(t) = \frac{\exp(tX_{n+1})}{(p\exp(at)+1-p)^{n+1}} = M_n(t)\frac{\exp(taY_n)}{(p\exp(at)+1-p)}.$$

→ Cependant, on a

$$\mathbb{E}[\exp(taY_n)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\exp(taY_n)]$$
$$= p\exp(ta)+1-p$$

→ Par suite, $\mathbb{E}[M_{n+1}(t)|\mathcal{F}_n] = M_n(t)$, $(M_n(t))$ est une martingale.
→ Ensuite, $\mathbb{E}[M_n(t)] = \mathbb{E}[M_1(t)] = 1$.

2) Par le théorème d'arrêt, $(M_{n\wedge T})$ est une martingale. De
→ plus, $X_{n\wedge T} \leq N$ donc pour tout $t \geq 0$, $M_{n\wedge T}(t) \leq \exp(tN)$.
→ La suite $(M_{n\wedge T}(t))$ est bornée donc bornée dans L^1.
Elle converge donc p.s. et dans L^1 vers $L_T(t) = M_T(t)$.

3) On a pour tout $t \geq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[M_{n \wedge T}(t)] = \mathbb{E}[M_T(t)] = \mathbb{E}[L_T(t)]$$

Cependant, $\mathbb{E}[M_{n \wedge T}(t)] = \mathbb{E}[M_1(t)] = 1$ donc

$$\mathbb{E}[(p\exp(at) + 1 - p)^{-T}] = \exp(-tN).$$

4) On pose $u = (p\exp(at) + 1 - p)^{-1}$. On déduit du 3) que,

→ pour tout $0 < u < 1$, $\mathbb{E}[u^T] = \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{up}\right)^{-N/a}$ car

$u = (p\exp(at) + 1 - p)^{-1}$ soit $\exp(at) = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{up}$.

5) On pose $G_T(u) = \mathbb{E}[u^T]$. On a $G_T'(u) = \mathbb{E}[Tu^{T-1}]$ donc

→ $G_T'(1) = \mathbb{E}[T]$. Or, $G_T'(u) = \frac{N}{apu^2}\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{up}\right)^{-N/a - 1}$ donc

$G_T'(1) = \frac{N}{ap}$ ce qui implique $\mathbb{E}[T] = \frac{N}{ap}$.

→ De même $G_T''(u) = \mathbb{E}[T(T-1)u^{T-2}]$ donc $G_T''(1) = \mathbb{E}[T^2] - \mathbb{E}[T]$

Cependant,

$$G_T''(u) = \frac{N}{ap^2u^4}\left(\frac{N}{a} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{up}\right)^{-\frac{N}{a} - 2} - \frac{2N}{apu^3}\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{up}\right)^{-\frac{N}{a} - 1}$$

$$G_T''(1) = \frac{N}{ap^2}\left(\frac{N}{a} + 1\right) - \frac{2N}{ap} = \frac{N}{ap^2}\left(\frac{N}{a} + 1 - 2p\right)$$

→ On tire alors $\mathbb{E}[T^2] = \frac{N}{ap^2}\left(\frac{N}{a} + 1 - p\right)$, $\mathrm{Var}(N) = \frac{N}{ap^2}(1-p)$.

PROBLÈME II

1) On a $S_n \leq n$ donc $M_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$ ce qui entraîne que
(M_n) est intégrable. De plus

$$M_{n+1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n+1}} = M_n \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}$$

Par suite, $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n \, \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right]$

$$= M_n \, \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right]$$

$$= M_n \left[\left(\frac{q}{p}\right) p + \frac{p}{q} q\right] = M_n (p+q)$$

$$= M_n$$

La suite (M_n) est une martingale positive. De plus,
$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_1] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_1}\right] = 1$.

2) Comme $p < 1/2$ et $q = 1-p$, $q > 1/2$ donc $\frac{q}{p} > 1$ ce qui
entraîne le 2).

3) L'inégalité de Kolmogorov entraîne alors que, $\forall a > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} S_k \geq a\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} M_k \geq \left(\frac{q}{p}\right)^a\right)$$

$$\leq \left(\frac{p}{q}\right)^a \mathbb{E}[M_n]$$

$$\leq \left(\frac{p}{q}\right)^a.$$

4) Finalement, on sait que pour toute variable aléatoire
positive Z, $\mathbb{E}[Z] = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq l)$. On tire alors
du 3) que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{1 \leq k \leq n} S_k\right] \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} S_k \geq l\right) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^l = \frac{p/q}{1 - p/q} = \frac{p}{q-p}$$

$$= \frac{p}{1-2p}.$$