UNIVERSITÉ DE BORDEAUX — le 11/03/2010

MASTER 1, 2009/2010 — (1)

PARTIEL SUR LES MARTINGALES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $Y_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1}=1|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n|\mathcal{F}_n)$

$\to$ $\mathbb{P}(Y_{n+1}=1|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} \leq \hat{\theta}_n - \theta|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(\varepsilon_{n+1} \leq \hat{\theta}_n - \theta)$

$= \mathbb{P}(\varepsilon_1 \leq \hat{\theta}_n - \theta) = F(\hat{\theta}_n - \theta)$

$\to$ On en déduit que $\mathcal{L}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n = F(\hat{\theta}_n - \theta)$.

2) On a $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = p_n$ et $\mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = p_n$.

3) Si $h(x) = F(x-\theta)$, on a $h(\theta) = F(0) = 1/2$ car f est paire

$\to$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{-\infty}^0 f(x)dx = 2F(0) = 1$

ce qui implique $F(0) = 1/2$. De plus, h est strictement croissante donc si $x > \theta$, $h(x) > h(\theta)$, $(x-\theta)(h(x) - 1/2) > 0$

et si $x < \theta$, $h(x) < h(\theta)$, $(x-\theta)(h(x) - 1/2) > 0$.

4) Si $g^2(x) = F(x-\theta)$, on a $g^2(\hat{\theta}_n) = F(\hat{\theta}_n - \theta) = p_n = \mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]$.

$\to$ De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g^2(x) \leq 1 \leq 1 + x^2$. Il découle du théorème de Robbins-Monro que

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{\theta}_n = \theta \quad \text{p.s.}$$

PROBLÈME II

1) (X_n) est une suite de v.a. indépendantes et de même loi
$\to$ intégrable, de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0<p<1$. Comme $\mathbb{E}[X_1]=p$
on déduit de la loi forte des grands nombres que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = p \quad p.s.$$

2) On a $Y_n(q)=X_n Y_{n-1}(q-1)$. De plus, si $\varepsilon_n(q)= Y_n(q)-pY_{n-1}(q-1)$
$\to$ on a $\varepsilon_n(q)=(X_n-p)Y_{n-1}(q-1)$ et

$$M_n=\sum_{k=q}^{n} \frac{\varepsilon_k(q)}{k}.$$

$\to$ Il est clair que $|\varepsilon_n(q)|<1$ ce qui entraine que $|M_n|<n$
donc (M_n) est intégrable. De plus, on a

$$\mathbb{E}[\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n]= \frac{1}{n+1}\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}(q)|\mathcal{F}_n]$$
$$= \frac{1}{n+1} Y_n(q-1)\mathbb{E}[X_{n+1}-p|\mathcal{F}_n]$$
$$= \frac{1}{n+1} Y_n(q-1)\mathbb{E}[X_{n+1}-p]=0$$

$\to$ Par suite, (M_n) est une martingale. On a également

$$\mathbb{E}[\Delta M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]= \frac{1}{(n+1)^2}\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2(q)|\mathcal{F}_n]$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2}Y_n^2(q-1)\,\mathbb{E}[(X_{n+1}-p)^2|\mathcal{F}_n]= \frac{1}{(n+1)^2}Y_n^2(q-1)\,\mathbb{E}[(X_{n+1}-p)^2]$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2}Y_n^2(q-1)\,\mathrm{Var}(X_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{(n+1)^2}Y_n^2(q-1)$$

avec $\sigma^2=p(1-p)$.

→ On en déduit que, pour tout $n \geq q$

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=q}^{n} \frac{\sigma^2}{k^2} Y_{k-1}^2(q-1) = \sigma^2 \sum_{k=q}^{n} \frac{Y_{k-1}^2(q-1)}{k^2}$$

→ Cependant, pour tout $n \geq q$, $0 \leq Y_n(q) \leq 1$ donc

$$\langle M \rangle_n \leq \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\sigma^2 \pi^2}{6}.$$

→ L'égalité $\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[M_q^2] + \mathbb{E}[\langle M \rangle_n]$ entraine alors que $\mathbb{E}[M_n^2] \leq 1 + \frac{\sigma^2 \pi^2}{6}$ donc

$$\sup_{n \geq q} \mathbb{E}[M_n^2] < +\infty$$

→ La martingale (M_n) est bornée dans $\mathbb{L}^2$

3) Le théorème de Doob implique que (M_n) converge p.s.

→ vers une v.a. de carré intégrable

4) Par le lemme de Kronecker, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=q}^{n} \varepsilon_k(q) \to 0 \text{ p.s.}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=q}^{n} Y_k(q) - \frac{p}{n} \sum_{k=q}^{n} Y_{k-1}(q-1) \to 0 \text{ p.s.}$$

→ Par suite, $\frac{1}{n} \Sigma_n(q) - \frac{p}{n} \Sigma_{n-1}(q-1) \to 0$ p.s.

→ On en déduit par récurrence sur q que $\frac{\Sigma_n(q)}{n} \to p^q$ p.s.

C'est vrai pour $q=1$ par le 1). On suppose que c'est vrai à l'ordre $q-1$, $\frac{\Sigma_n(q-1)}{n} \to p^{q-1}$ p.s. On tire alors que

$$\frac{1}{n} \Sigma_n(q) \to p^q \text{ p.s.}$$