UNIVERSITÉS BORDEAUX **Le 08/01/2008**
MASTER 1, 2007/2008

EXAMEN
MARTINGALES

Durée 1h30

PROBLÈME I

6 points

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$. Soit (X_n) la suite définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $X_n = n^a \varepsilon_n$ avec $a > 0$. On pose

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable.

2) Calculer son processus croissant $<M>_n$ et vérifier que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{<M>_n}{n^{2a+1}} = \frac{1}{2a+1}.$$

3) En déduire la convergence presque sûre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n^{2a+1}} = 0.$$

4) Montrer également le théorème limite centrale

$$\frac{M_n}{n^a\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{2a+1}\Big).$$

PROBLÈME II

4 points

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$. Pour un réel $\theta > 0$, on pose

$$M_n = \frac{\exp(\theta S_n)}{(\cosh\theta)^n} \qquad \text{avec} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.$$

1) Montrer que (M_n) est une martingale.

2) Pour un entier $a \geqslant 1$, soit $T = \inf\{n \geqslant 1 \ / \ S_n = a\}$ le premier temps de passage de (S_n) en a. Il est facile de voir que T est un temps d'arrêt fini p.s. Montrer que $(M_{n\wedge T})$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ vers la variable aléatoire
$$L = \frac{\exp(\theta a)}{(\cosh\theta)^T}.$$

3) En déduire que $\mathbb{E}[(\cosh\theta)^{-T}] = \exp(-\theta a)$.

PROBLÈME III

10 points

On peut se demander si les performances sportives seront toujours battues et si oui, à quel rythme. Afin de modéliser cette situation, on considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi, pour laquelle il n'y a pas d'ex aequo. Pour tout $n \geqslant 1$, on note R_n le rang relatif de X_n. Il est clair que R_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. De plus, les variables aléatoires $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont indépendantes avec, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{n}.$$
Pour tout $n \geqslant 1$, on dit qu'il se produit un record à l'instant n si $R_n = 1$. On s'intéresse au comportement asymptotique des suites (Z_n) et (M_n) données par
$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{(R_k=1)} \qquad \text{et} \qquad M_n = Z_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
La suite (Z_n) compte le nombre de records qui se produisent avant l'instant n.

1) Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, l'espérance et la variance de Z_n.

2) Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et calculer son processus croissant $<M>_n$.

3) En déduire la convergence presque sûre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} = 0.$$

4) Montrer également le théorème limite centrale
$$\frac{M_n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

5) En déduire que $\dfrac{Z_n}{\log n} \longrightarrow 1$ presque sûrement et que l'on a
$$\frac{Z_n - \log(n)}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Indication : On utilisera que, si γ est la constante d'Euler,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$