UNIVERSITÉS BORDEAUX **Le 6/11/2007**
MASTER 1, 2007/2008

PARTIEL
MARTINGALES

Durée 2 heures

PROBLÈME I

8 points

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle symétrique, encore appelée loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n(t) = \exp(tS_n - n \log L(t))$ avec

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(tx) f(x) dx.$$

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $L(t)$.

2) Pour tout $|t| < \lambda$, montrer que $(M_n(t))$ est une martingale qui converge presque sûrement et déterminer sa limite.

3) Conclure que, pour tout $|t| < \lambda$ non nul, $(M_n(t))$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^1$.

PROBLÈME II

12 points

Soient a, b, c trois entiers supérieurs ou égaux à 1. Une urne contient a boules rouges et b boules blanches. On tire une boule dans l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace et on ajoute c boules de la même couleur, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne après l'instant 1. On itère ensuite la même procédure. Après l'instant n, il y a donc $a + b + nc$ boules dans l'urne. Soit X_n le nombre de boules rouges dans l'urne après l'instant n et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. La proportion associée est donc

$$M_n = \frac{X_n}{a + b + nc}.$$

1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_n ?

2) Montrer que l'on a la décomposition

$$X_n = a + c \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

où, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ avec p_n à déterminer.

3) En déduire que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (a + b + c(n+1))M_n.$$

4) Montrer que (M_n) est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire L.

5) Dans le cas particulier où $a = b = c$, montrer par récurrence que la variable aléatoire X_n est uniformément distribuée sur $\{a, 2a, \ldots, (n+1)a\}$ et que la limite L suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.