Université de Bordeaux Le 17/01/2011 (1)

EXAMEN
SERIES CHRONOLOGIQUES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) (X_n) est un processus moyenne mobile d'ordre 4 donc (X_n)
→ est un processus stationnaire centré. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[(\varepsilon_n + a\varepsilon_{n-2} + b\varepsilon_{n-4})^2] = \sigma^2 + a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2$$
$$= \sigma^2(1+a^2+b^2).$$

→ Ensuite, $\mathbb{E}[X_nX_{n-1}]=0$, $\mathbb{E}[X_nX_{n-2}] = \sigma^2 a(1+b)$ et $\mathbb{E}[X_nX_{n-4}] = b\sigma^2$.
La fonction de covariance associée à (X_n) est donnée par

$$\gamma(n) = \begin{cases} \sigma^2(1+a^2+b^2) & \text{si } n=0 \\ \sigma^2 a(1+b) & \text{si } |n|=2 \\ \sigma^2 b & \text{si } |n|=4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) La densité spectrale associée à (X_n) est donnée, pour tout
→ $x \in \mathbb{T}$, par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma(n)e^{-inx} = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(1+a^2+b^2+a(1+b)(e^{2ix}+e^{-2ix})\right.$$
$$\left.+b(e^{4ix}+e^{-4ix})\right) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(1+a^2+b^2+2a(1+b)\cos(2x)+2b\cos(4x)\right).$$

PROBLÈME II

1) Comme Γ_p est inversible et Γ_{p+1} n'est pas inversible, il
→ existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $b_{p+1} \neq 0$, tel que
$b^t \Gamma_{p+1} b = 0$. On peut prendre, sans perte de généralité, $b_{p+1} = 1$
→ Si $X = (X_1, \dots, X_{p+1})^t$, on a alors

$$b^t \Gamma_{p+1} b = b^t \mathbb{E}[XX^t] b = \mathbb{E}[(b^t X)^2] = 0$$

ce qui entraîne $b^t X = 0$ presque sûrement. Par suite,

$$X_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} b_k X_k = 0$$

donc

$$X_{p+1} = -\sum_{k=1}^{p} b_k X_k = \sum_{k=1}^{p} a_k X_k$$

en prenant, pour tout $1 \leq k \leq p$, $a_k = -b_k$.

2) Pour tout $h \geq 1$, si $Y = (X_h, \dots, X_{h+p})^t$, on a par stationnarité
→ $\mathbb{E}[XX^t] = \mathbb{E}[YY^t]$ ce qui entraîne

$$Y_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} a_k Y_k \quad \text{donc} \quad X_{p+h} = \sum_{k=1}^{p} a_k X_{k+h-1}$$

→ On en déduit que, pour tout $n \geq p+1$, X_n est combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_p$ donc il existe $a_{n,1}, \dots, a_{n,p} \in \mathbb{R}$ tels que

$$X_n = \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} X_k$$

3) On a

$$\gamma(0) = \mathbb{E}[X_n^2] = a_n^t \Gamma_p a_n \geq \lambda_p \|a_n\|^2$$

car λ_p est la plus petite valeur propre de Γ_p.

4) On a également

$$\gamma(0) = \mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_n \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} X_k]$$
$$= \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} \mathbb{E}[X_n X_k] = \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} \gamma(n-k)$$

5) On en déduit que, pour tout $n \geq p+1$

$$\gamma(0) \leq \sum_{k=1}^{p} |a_{n,k}| |\gamma(n-k)|.$$

→ Cependant, par le 3), on a pour tout $1 \leq k \leq p$, $(a_{n,k})^2 \leq \gamma(0)/\lambda_p$. De plus, si $\lim_{n \to +\infty} \gamma(n) = 0$, il en découle que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} |a_{n,k}| |\gamma(n-k)| = 0$ donc $\gamma(0) = 0$ ce qui est absurde. On peut conclure par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, Γ_n est inversible.

PROBLÈME III

→ Tout d'abord, comme (X_n) est un processus moyenne mobile, on a

$$\gamma(n) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } n = 0 \\ \sigma^2 \theta & \text{si } |n| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ De plus, $\hat{X}_{n+1}$ est la projection de X_{n+1} sur l'enveloppe linéaire L_n^X engendrée par $X_1, \dots, X_n$ donc $X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} \in (L_n^X)^\perp$ ce qui entraîne que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\mathbb{E}[(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}) X_{n+1-k}] = 0$ donc

$$\mathbb{E}[\hat{X}_{n+1} X_{n+1-k}] = \mathbb{E}[X_{n+1} X_{n+1-k}]$$

$\rightarrow$ Mais, $\mathbb{E}[X_{n+1}X_{n+1-k}] = \gamma(k)$ et

$$\mathbb{E}[X_{n+1}X_{n+1-k}] = \sum_{\ell=1}^{n} \Phi_\ell \, \mathbb{E}[X_{n+1-\ell}X_{n+1-k}] = \sum_{\ell=1}^{n} \Phi_\ell \, \gamma(k-\ell)$$

$\rightarrow$ On a donc, pour tout $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{\ell=1}^{n} \Phi_\ell \, \gamma(k-\ell) = \gamma(k)$$

$\rightarrow$ Si $A_n = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix}$, $B_n = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma(1) \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix}$

$$\Gamma_n A_n = B_n$$

$\rightarrow$ Mais,

$$\Gamma_n A_n = B_n \iff \begin{cases} (1+\theta^2)\Phi_1 + \theta\Phi_2 = \theta \\ \theta\Phi_{k-1} + (1+\theta^2)\Phi_k + \theta\Phi_{k+1} = 0, \quad 2 \leq k \leq n-1 \\ \theta\Phi_{n-1} + (1+\theta^2)\Phi_n = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ On est amené à résoudre l'équation caractéristique

$$\theta x^2 + (1+\theta^2)x + \theta = 0$$

$$\Delta = (1+\theta^2)^2 - 4\theta^2 = (1-\theta^2)^2, \quad \sqrt{\Delta} = 1-\theta^2$$

$$x_1 = \frac{-(1+\theta^2)-(1-\theta^2)}{2\theta} = -\frac{1}{\theta}$$

$$x_2 = \frac{-(1+\theta^2)+(1-\theta^2)}{2\theta} = -\theta$$

$\rightarrow$ On a par suite, $\Phi_k = a(-\theta)^k + b\left(-\frac{1}{\theta}\right)^k$. Les équations au bord entraînent que $a = \frac{1}{\theta^{2(n+1)}-1}$ et $b = \frac{\theta^{2(n+1)}}{1-\theta^{2(n+1)}}$

donc, pour tout $1 \leq k \leq n$

$$\Phi_k = \frac{1}{1-\theta^{2(n+1)}} \left\{ -(-\theta)^k + \theta^{2(n+1)}\left(-\frac{1}{\theta}\right)^k \right\}.$$

$\rightarrow$ En particulier, $\alpha(n) = \Phi_n = \frac{-(-\theta)^n}{1-\theta^{2(n+1)}}\left\{1-\theta^2\right\}.$

PROBLÈME IV

1) Soit A le polynôme donné par

$$A(z)=1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}z^2$$

→ Comme $\Delta=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$, les racines de ce polynôme sont

$$z_1=\sqrt{5}-1 \quad \text{et} \quad z_2=-\sqrt{5}-1$$

→ Il est clair que $|z_1|>1$ et $|z_2|>1$ donc A est causal et pour tout $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<\sqrt{5}-1$, on a

$$A^{-1}(z)=(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

→ On a $c_0=1$, $c_1=1/2$ et, pour tout $k\geq 1$,

$$c_{k+1}-\frac{1}{2}c_k-\frac{1}{4}c_{k-1}=0$$

→ L'équation caractéristique associée est

$$x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=0$$

$\Delta=\frac{5}{4}$, $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. On a donc, $\forall k\geq 0$,

$$c_k=ax_1^k+bx_2^k$$

avec $a+b=c_0=1$ et $ax_1+bx_2=c_1=1/2$. Par suite

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad b=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$$

→ On a donc, $\forall n\in\mathbb{Z}$

$$X_n=A^{-1}(R)\varepsilon_n=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varepsilon_{n-k}$$

2) On en déduit que, pour tout $n \geq 0$,

$$\gamma(n) = \mathbb{E}[X_{n+k}X_k] = \sigma^2 \sum_{k=n}^{\infty} c_k c_{k-n} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_{k+n}$$

$$= \frac{\sigma^2}{20} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{(\sqrt{5}-1)x_1^k + (\sqrt{5}+1)x_2^k\right\} \left\{(\sqrt{5}-1)x_1^{n+k} + (\sqrt{5}+1)x_2^{n+k}\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2(\sqrt{5}-1)^2}{20} x_1^n \sum_{k=0}^{\infty} x_1^{2k} + \frac{\sigma^2(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{20} x_2^n \sum_{k=0}^{\infty} (x_1x_2)^k$$

$$+ \frac{\sigma^2(\sqrt{5}+1)^2}{20} x_2^n \sum_{k=0}^{\infty} x_2^{2k} + \frac{\sigma^2(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{20} x_1^n \sum_{k=0}^{\infty} (x_1x_2)^k$$

$$= \frac{4\sigma^2}{5} \frac{x_1^{n+2}}{(1-x_1^2)} + \frac{4\sigma^2 x_2^{n+2}}{5(1-x_2^2)} + \frac{4\sigma^2}{25}(x_1^n + x_2^n)$$ car

$x_1 x_2 = -\frac{1}{4}$. Par suite, comme

$$x_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad x_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

$$\gamma(n) = \frac{8\sigma^2}{25}\left((3-\sqrt{5})x_1^n + (3+\sqrt{5})x_2^n\right) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

PROBLÈME V

1) Soient A et B les polynômes donnés par

$$A(z) = 1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}z^2 \quad \text{et} \quad B(z) = 1 + \frac{7}{3}z$$

→ On a $A(z) = \frac{1}{9}(3-z)^2$ et on doit trouver $C(z)$ tel que

$$A^{-1}(z)B(z) = C(z).$$

→ On a donc $B(z) = 1 + \frac{7}{3}z = A(z)C(z) = \frac{1}{9}(3-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

$\rightarrow$ On a $c_0 = 1$, $c_1 = 3$ et pour tout $k \geq 1$

$$c_{k+1} - \frac{2}{3} c_k + \frac{1}{9} c_{k-1} = 0$$

$\rightarrow$ L'équation caractéristique associée est

$$x^2 - \frac{2}{3} x + \frac{1}{9} = 0$$

$$\frac{1}{9}(9x^2 - 6x + 1) = 0 \iff \frac{1}{9}(3x-1)^2 = 0$$

$\rightarrow$ On a une racine double $x_0 = \frac{1}{3}$. Par suite, $\forall k \geq 0$,

$$c_k = (a+bk)\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

avec $c_1 = \frac{a+b}{3} = 3$ donc $a+b = 9$ et $c_2 = \frac{a+2b}{9} = \frac{17}{9}$ donc $a+2b = 17$. On en déduit que $a=1$, $b=8$ et

$$c_k = (1+8k)\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$\rightarrow$ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$X_n = A^{-1}(R)B(R)\varepsilon_n = C(R)\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}$$

2) Pour tout $n \geq 0$,

$$\gamma(n) = \sigma^2 \sum_{k=n}^{\infty} c_k c_{k-n} = \sigma^2 \sum_{k=n}^{\infty} (1+8k)(1+8(k-n))\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-n}$$

$$= \frac{\sigma^2}{3^n} \sum_{k=n}^{\infty} (1+8k)(1+8(k-n))\left(\frac{1}{9}\right)^{k-n}$$

$$= \frac{\sigma^2}{3^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{1 + 8(n+k) + 8k + 64k(n+k)\right\}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= \frac{\sigma^2}{3^n}(1+8n)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{16\sigma^2(1+4n)}{3^n}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{64\sigma^2}{3^n}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{9}\right)^k.$$

→ Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x|<1$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty} k x^k, \quad \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k=\frac{9}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{9}\right)^k=\frac{9}{64}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{9}\right)^k=\frac{45}{256}$$

→ Finalement, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\gamma(n)=\frac{\sigma^2}{3^n}\left\{(1+8n)\frac{9}{8}+16(1+4n)\frac{9}{64}+64\times\frac{45}{256}\right\}$$

$$=\frac{\sigma^2}{3^n}\left\{\frac{9}{8}+9n+\frac{9}{4}+9n+\frac{45}{4}\right\}$$

$$=\frac{\sigma^2}{3^n}\left\{18n+\frac{117}{8}\right\}.$$