Université de Bordeaux

Le 16/01/2012 ①

EXAMEN
SERIES CHRONOLOGIQUES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n = \theta X_{n-1} + \rho \varepsilon_{n-1} + V_n = \theta X_{n-1} + \rho(X_{n-1} - \theta X_{n-2}) + V_n$$
$$= (\theta+\rho) X_{n-1} - \theta\rho X_{n-2} + V_n$$

2) Soit A le polynôme associé à ce processus autorégressif d'ordre 2, $A(z) = 1 - (\theta+\rho)z + \theta\rho z^2$. On doit montrer que les racines de A sont à l'extérieur du disque unité. On a

$$\Delta = (\theta+\rho)^2 - 4\theta\rho = (\theta-\rho)^2$$

→ les racines de A sont donc

$$z_1 = \frac{(\theta+\rho)-(\theta-\rho)}{2\theta\rho} = \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(\theta+\rho)+(\theta-\rho)}{2\theta\rho} = \frac{1}{\rho}$$

→ On a supposé que $|\theta|<1$ et $|\rho|<1$ ce qui entraine $|z_1|>1$ et $|z_2|>1$ donc A est causal.

3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \min\left(\frac{1}{|\theta|}, \frac{1}{|\rho|}\right)$, on a

$$A^{-1}(z) = C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

→ avec $c_0 = 1$ et $c_1 = (\theta+\rho)$. De plus, comme $A(z)C(z) = 1$,

$$\left(1-(\theta+\rho)z + \theta\rho z^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = 1$$

→ Il en découle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - (\theta+\rho)\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1} + \theta\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2} = 1$$

donc $$\sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+1} - (\theta+\rho)c_k + \theta\rho c_{k-1}) z^{k+1} = 0.$$

→ Par suite, pour tout $k \geq 1$

$$c_{k+1} - (\theta+\rho)c_k + \theta\rho c_{k-1} = 0.$$

→ L'équation caractéristique associée est

$$x^2 - (\theta+\rho)x + \theta\rho = 0.$$

$\Delta = (\theta+\rho)^2 - 4\theta\rho = (\theta-\rho)^2$. On en déduit que

$$x_1 = \frac{(\theta+\rho)+(\theta-\rho)}{2} = \theta \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{(\theta+\rho)-(\theta-\rho)}{2} = \rho.$$

→ On a donc, pour tout $k \geq 0$

$$c_k = a x_1^k + b x_2^k$$

avec $a+b = c_0 = 1$ et $ax_1 + bx_2 = c_1 = \theta+\rho$. Par suite,

$$a = \frac{\theta}{\theta-\rho} \quad \text{et} \quad b = \frac{-\rho}{\theta-\rho}$$

→ Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$X_n = A^{-1}(R)V_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$$

avec, pour tout $k \geq 0$

$$c_k = \frac{1}{\theta-\rho}(\theta^{k+1} - \rho^{k+1}).$$

4) On peut ainsi calculer la fonction d'autocovariance γ associée à (X_n). Elle est donnée, pour tout $n \geq 0$, par

$$\gamma(n) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_{k+n}$$

→ En particulier, $\mathbb{E}[X_n^2] = \gamma(0) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$.

→ Par suite,

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{(\theta-\rho)^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\theta^{k+1}-\rho^{k+1})^2 = \frac{1}{(\theta-\rho)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{2(k+1)}+\rho^{2(k+1)}-2(\theta\rho)^{k+1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{(\theta-\rho)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{2k}+\rho^{2k}-2(\theta\rho)^k$$

$$= \frac{\sigma^2}{(\theta-\rho)^2}\left\{\frac{\theta^2}{1-\theta^2}+\frac{\rho^2}{1-\rho^2}-\frac{2\theta\rho}{1-\theta\rho}\right\}.$$

→ On en déduit que

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{(\theta-\rho)^2}\;\frac{\theta^2(1-\rho^2)(1-\theta\rho)+\rho^2(1-\theta^2)(1-\theta\rho)-2\theta\rho(1-\theta^2)(1-\rho^2)}{(1-\theta^2)(1-\rho^2)(1-\theta\rho)}$$

$$= \frac{\sigma^2}{(\theta-\rho)^2}\;\frac{\theta(1-\rho^2)(\theta-\theta^2\rho-\rho+\theta\rho^2)+\rho(1-\theta^2)(\rho-\theta\rho^2-\theta+\theta\rho^2)}{(1-\theta^2)(1-\rho^2)(1-\theta\rho)}$$

$$= \frac{\sigma^2}{(\theta-\rho)^2}\;\frac{(\theta-\rho)(\theta-\rho+\theta\rho(\theta-\rho))}{(1-\theta^2)(1-\rho^2)(1-\theta\rho)} = \frac{\sigma^2(\theta-\rho)^2(1+\theta\rho)}{(\theta-\rho)^2(1-\theta^2)(1-\rho^2)(1-\theta\rho)}$$

$$= \frac{\sigma^2(1+\theta\rho)}{(1-\theta^2)(1-\rho^2)(1-\theta\rho)}.$$

PROBLÈME II

1) On a pour tout $z\in\mathbb{C}$, $A(z) = \rho^2 z^2 - 2\rho z\cos\theta + 1$

→ $\Delta = 4\rho^2\cos^2(\theta) - 4\rho^2 = 4\rho^2(\cos^2(\theta)-1) = -4\rho^2\sin^2(\theta) = (2i\rho\sin\theta)^2$

$$z_1 = \frac{2\rho\cos(\theta)+2i\rho\sin(\theta)}{2\rho^2} = \frac{1}{\rho}(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = \frac{e^{i\theta}}{\rho}$$

$$z_2 = \frac{2\rho\cos(\theta)-2i\rho\sin(\theta)}{2\rho^2} = \frac{1}{\rho}(\cos(\theta)-i\sin(\theta)) = \frac{e^{-i\theta}}{\rho}.$$

2) On a $|z_1| = |z_2| = \dfrac{1}{|\rho|} > 1$ car $|\rho|<1$ donc A est causal.

3) La densité spectrale associée à (X_n) est donnée par

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|A(e^{-ix})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 e^{2ix} - 2\rho\cos(\theta)e^{ix} + 1)(\rho^2 e^{-2ix} - 2\rho\cos(\theta)e^{-ix} + 1)}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi\left(1+\rho^2+4\rho^2\cos^2(\theta) - 4\rho(1+\rho^2)\cos\theta\cos x + 2\rho^2\cos(2x)\right)}.$$

PROBLÈME III

1) Soit A et B les polynômes donnés par

$$A(z) = 1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}z^2 \text{ et } B(z) = 1 + \frac{7}{3}z.$$

→ On a $A(z) = \frac{1}{9}(z-3)^2$ et on doit trouver C tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z|<3$,

$$A^{-1}(z)\,B(z) = C(z).$$

→ On a donc $B(z) = A(z)C(z) = \frac{1}{9}(z-3)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Il en découle que $c_0 = 1$, $c_1 = 3$ et pour tout $k \geq 1$,

$$c_{k+1} - \frac{2}{3}c_k + \frac{1}{9}c_{k-1} = 0$$

→ L'équation caractéristique associée est

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

$$\iff \frac{1}{9}(3x-1)^2 = 0$$

→ On a une racine double $x_0 = \frac{1}{3}$. Par suite, $\forall k \geq 0$

$$c_k = (a+bk)\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

avec $c_0 = a = 1$ et $c_1 = \frac{a+b}{3} = 3$ donc $b = 8$. Par suite, pour tout $k \geq 0$

$$c_k = (1+8k)\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

→ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$X_n = A^{-1}(R)B(R)\varepsilon_n = C(R)\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

2) Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\gamma(n) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_{k+n} = \frac{\sigma^2}{3^n} \sum_{k=0}^{\infty} \{1 + 8(n+k) + 8k + 64k(n+k)\} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$
$$= \frac{\sigma^2}{3^n}(1+8n)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{16\sigma^2(1+4n)}{3^n}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{64\sigma^2}{3^n}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

→ Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k, \quad \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{9}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{9}{64}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{45}{256}.$$

→ Finalement, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\gamma(n) = \frac{\sigma^2}{3^n}\left\{(1+8n)\frac{9}{8} + 16(1+4n)\frac{9}{64} + 64 \times \frac{45}{256}\right\}$$
$$= \frac{\sigma^2}{3^n}\left\{\frac{9}{8} + 9n + \frac{9}{4} + 9n + \frac{45}{4}\right\}$$
$$= \frac{\sigma^2}{3^n}\left\{18n + \frac{117}{8}\right\}.$$

PROBLÈME IV

1) Le processus (X_n) est gaussien, stationnaire, centré, de
→ fonction d'autocovariance γ donnée, $\forall n \in \mathbb{Z}$, par

$$\gamma(n) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\theta^{|n|}.$$

→ La fonction γ est absolument convergente car $|\theta|<1$ et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\gamma(n)| = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\theta|^{|n|} = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(2\sum_{n=0}^{\infty}|\theta|^n - 1\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(\frac{2}{1-|\theta|}-1\right) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(\frac{1+|\theta|}{1-|\theta|}\right) < +\infty.$$

→ Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{\gamma}_n(k) = \gamma(k) \quad \text{p.s.}$$

→ En particulier, pour $k=0$ et $k=1$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}X_k^2 \to \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_kX_{k-1} \to \frac{\sigma^2\theta}{1-\theta^2}$$

ce qui entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{\theta}_n = \theta \quad \text{p.s.}$$

2) On a $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|\,|\gamma(n)| = \frac{2\sigma^2}{1-\theta^2}\sum_{n=1}^{\infty}n|\theta|^n = \frac{2\sigma^2|\theta|}{(1-\theta^2)(1-|\theta|)^2} < +\infty.$

→ Il en découle que

$$\sqrt{n}\left(\hat{\rho}_n(1)-\rho(1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\tau^2)$$

→ La variance τ^2 est donnée par la formule de Bartlett

$$\tau^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho(n+1)+\rho(n-1)-2\rho(n)\rho(1)\right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\theta^{n+1}+\theta^{n-1}-2\theta^{n+1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\theta^{n+1}-\theta^{n-1}\right)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\theta^{n+2}-\theta^{n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\theta^{2n+4}+\theta^{2n}-2\theta^2\theta^{2n}\right)$$

$$= (\theta^2-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\theta^{2n} = \frac{(\theta^2-1)^2}{1-\theta^2} = 1-\theta^2$$

→ Comme $\rho(1)=\theta$ et $\hat{\rho}_n(1)=\hat{\theta}_n$, on en déduit que

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1-\theta^2).$$

3) On a

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{\theta}_n X_{k-1})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{2\hat{\theta}_n}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1} + \frac{\hat{\theta}_n^2}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2$$

→ Il découle alors du 1) que

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} - \frac{2\sigma^2\theta^2}{1-\theta^2} + \frac{\sigma^2\theta^2}{1-\theta^2} = \frac{\sigma^2(1-\theta^2)}{1-\theta^2} = \sigma^2 \text{ p.s.}$$

→ De plus, soit

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \theta X_{k-1})^2$$

On a
$$\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{\theta}_n X_{k-1})^2 - (X_k - \theta X_{k-1})^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\theta - \hat{\theta}_n) X_{k-1}\left(2X_k - (\hat{\theta}_n + \theta)X_{k-1}\right)$$
$$= (\theta - \hat{\theta}_n)\left\{\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1} - (\hat{\theta}_n + \theta)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2\right\}$$

→ On a déjà vu au 2) que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1-\theta^2)$.

De plus, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1} - (\hat{\theta}_n + \theta)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 = \frac{2\sigma^2\theta}{1-\theta^2} - \frac{2\sigma^2\theta}{1-\theta^2} = 0 \text{ p.s.}$$

→ Par suite, on a

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

→ Finalement, par la loi forte des grands nombres et le TLC pour les v.a. indépendantes et de même loi,

$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2$ p.s. et $\sqrt{n}(\sigma_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 2\sigma^4)$

où la variance asymptotique $2\sigma^2 = Var(\varepsilon_1^2) = E[\varepsilon_1^4] - E^2[\varepsilon_1^2]$

→ Finalement, comme $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2 + \sigma_n^2 - \sigma^2)$, on a

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 2\sigma^4).$$