Université de Bordeaux

le 22/11/2010

PARTIEL
SÉRIES CHRONOLOGIQUES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $\mathbb{E}[X_n] = an^2+bn+c$ donc (X_n) n'est pas stationnaire
→ sauf si $a=b=0$.

2) On a $Y_n = \Delta X_n = X_n - X_{n-1} = an^2+bn+c+\varepsilon_n - a(n-1)^2 - b(n-1) - c - \varepsilon_{n-1}$
→ $Y_n = a(2n-1)+b+\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$ donc $\mathbb{E}[Y_n] = a(2n-1)+b$ et (Y_n) n'est pas stationnaire sauf si $a=0$.

3) On a $Z_n = Y_n - Y_{n-1} = a(2n-1)+b+\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1} - a(2(n-1)-1)-b - \varepsilon_{n-1}+\varepsilon_{n-2} = 2a+\varepsilon_n - 2\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_{n-2}$. Il en découle que
→ $\mathbb{E}[Z_n] = 2a + \mathbb{E}[\Delta^2\varepsilon_n] = 2a$ et $\mathbb{E}[Z_n^2] = 4a^2+6\sigma^2$ donc $\mathrm{Var}(Z_n) = 6\sigma^2$. De plus, pour tout $n \neq m$, on a

$$\Gamma(n,m) = \mathrm{Cov}(Z_n, Z_m) = \mathbb{E}[(Z_n-2a)(Z_m-2a)] = \mathbb{E}[\Delta^2\varepsilon_n \Delta^2\varepsilon_m]$$

→ si $m=n+1$, $\Gamma(n,n+1) = -4\sigma^2$ et si $m=n-1$, $\Gamma(n,n-1) = -4\sigma^2$
→ si $m=n+2$, $\Gamma(n,n+2) = \sigma^2$ et si $m=n-2$, $\Gamma(n,n-2) = \sigma^2$
→ sinon, on a $\Gamma(n,m)=0$. Par suite, (Z_n) est stationnaire et

$$\gamma(n) = \begin{cases} 6\sigma^2 & \text{si } n=0 \\ -4\sigma^2 & \text{si } |n|=1 \\ \sigma^2 & \text{si } |n|=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PROBLÈME II

1) Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a $\gamma(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}f(x)dx$. Tout d'abord,

$$\gamma(0)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}(a-|x|)dx=\frac{1}{a^2}\left(2a^2-2\int_0^a x\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{a^2}\left(2a^2-[x^2]_0^a\right)=\frac{a^2}{a^2}=1.$$

→ Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$

$$\gamma(n)=\int_{-a}^{a}e^{inx}\left(\frac{a-|x|}{a^2}\right)dx=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}e^{inx}dx-\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}|x|e^{inx}dx$$
$$=\frac{1}{ina}\left[e^{inx}\right]_{-a}^{a}-\frac{2}{a^2}\int_0^a x\cos(nx)dx$$
$$=\frac{2}{na}\sin(na)-\frac{2}{a^2}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^a+\frac{2}{a^2}\int_0^a\frac{\sin(nx)}{n}dx$$
$$=\frac{2}{a^2n^2}\left[-\cos(nx)\right]_0^a=\frac{2}{a^2n^2}\left(1-\cos(na)\right).$$

2) On a $f(0)=\frac{1}{a}$ et $f(0)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma(n)=\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{4}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(na)}{n^2}\right)$

→ donc $2\pi a=a^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(na)}{n^2}$. Cependant,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ donc $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(na)}{n^2}=a^2-2\pi a+\frac{2\pi^2}{3}=(\pi-a)^2-\frac{\pi^2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(na)}{n^2}=\frac{1}{4}(\pi-a)^2-\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{12}\left(3(\pi-a)^2-\pi^2\right).$$

PROBLÈME III

1) On a $A(z)=0\iff bz^2+az-1=0$. Le produit des racines de

→ ce polynôme vaut $-\frac{1}{b}$. Si $|b|\geq 1$, alors $\frac{1}{|b|}\leq 1$ donc le produit des racines est ≤ 1 et A ne peut être causal

2) Si $b=0$ alors $A(z)=1-az$ donc A est causal ssi $\frac{1}{|a|}>1$ donc

→ $|a|<1$. Ensuite, si $b\neq 0$, soit $\Delta=a^2+4b$.

→ Si $0<b<1$, $\Delta>0$ donc A possède 2 racines réelles

$$z_1=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2b}\quad\text{et}\quad z_2=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2b}$$

$\rightarrow |z_1|>1$ et $|z_2|>1$ ssi $|a+\sqrt{\Delta}|>2b$ et $|a-\sqrt{\Delta}|>2b$

- Si $a\geq 0$, $|a+\sqrt{\Delta}|\geq|a-\sqrt{\Delta}|$ donc il suffit de vérifier que $|a-\sqrt{\Delta}|>2b \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}-a>2b \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}>a+2b$
$\Leftrightarrow \Delta>a^2+4ab+4b^2 \Leftrightarrow 1>a+b$
- Si $a\leq 0$, $|a-\sqrt{\Delta}|\geq|a+\sqrt{\Delta}|$ donc il suffit de vérifier que $|a+\sqrt{\Delta}|>2b \Leftrightarrow a+\sqrt{\Delta}>2b \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}>2b-a$
$\Leftrightarrow \Delta>a^2-4ab+4b^2 \Leftrightarrow 1>-a+b$

$\rightarrow$ Si $0<b<1$, le domaine est donné par $|a|<1-b$

$\rightarrow$ Si $-1<b<0$, $\Delta>0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{4}<b<0$ et $|z_1|>1$ et $|z_2|>1$ ssi $|a+\sqrt{\Delta}|>-2b$ et $|a-\sqrt{\Delta}|>-2b$.

- Si $a\geq 0$, $|a-\sqrt{\Delta}|>-2b \Leftrightarrow a-\sqrt{\Delta}>-2b \Leftrightarrow a+2b>\sqrt{\Delta}$
$\Leftrightarrow a^2+4ab+4b^2>\Delta \Leftrightarrow 1>a+b$
- Si $a\leq 0$, $|a+\sqrt{\Delta}|>-2b \Leftrightarrow -a-\sqrt{\Delta}>-2b \Leftrightarrow -a+2b>\sqrt{\Delta}$
$\Leftrightarrow a^2-4ab+4b^2>\Delta \Leftrightarrow 1>-a+b$

$\rightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow b=-\frac{a^2}{4}$. Dans ce cas, $z_1=z_2=\frac{-a}{2b}=\frac{2}{a}$

Il faut donc que $\frac{2}{|a|}>1$, $|a|<2$.

$\rightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow b<-\frac{a^2}{4}$. On a alors 2 racines complexes conjuguées

$$z_1=\frac{-a-i\sqrt{-\Delta}}{2b} \text{ et } z_2=\frac{-a+i\sqrt{-\Delta}}{2b}$$

$\rightarrow$ On a $|z_1|^2=|z_2|^2=-\frac{1}{b}>1$. Finalement, le domaine est donné par le triangle $|b|<1$ et $|a|<1-b$.

3) La densité spectrale est donnée, $\forall x\in\Pi$, par

$$f(x)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|A(e^{-ix})|^2}=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{1+a^2+b^2-2a\cos(x)+2ab\cos(x)-2b\cos(2x)}$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{1+a^2-2a(1-b)\cos(x)-2b\cos(2x)+b^2}$$

PROBLÈME IV

1) On a $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n = \theta X_{n-1} + \rho \varepsilon_{n-1} + V_n$$
$$= \theta X_{n-1} + \rho (X_{n-1} - \theta X_{n-2}) + V_n$$
$$= (\theta + \rho) X_{n-1} - \theta \rho X_{n-2} + V_n$$

2) On pose $a = \theta + \rho$ et $b = -\theta\rho$. Tout d'abord, on a
$\to |b| = |\theta||\rho| < 1$. Ensuite, par le problème III, il suffit de vérifier que $|a| < 1 + \theta\rho$. On a comme $|\theta| < 1$ et $|\rho| < 1$,

$$|a| < 1+\theta\rho \iff |\theta+\rho| < 1+\theta\rho \iff -1-\theta\rho < \theta+\rho < 1+\theta\rho$$
$$\iff (1-\theta)(1-\rho) > 0 \text{ et } (1+\theta)(1+\rho) > 0$$
$$\iff \theta < 1 \text{ et } \rho < 1 \text{ et } \theta > -1 \text{ et } \rho > -1$$
$$\iff |\theta| < 1 \text{ et } |\rho| < 1.$$

$\to$ On peut conclure que le processus AR(2) est causal.

PROBLÈME V

1) On a $\mathbb{E}[\cos(an+U)] = 0$ et $\mathbb{E}[\cos^2(an+U)] = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{E}[X_n] = 0$
$\to$ et $\mathbb{E}[X_n^2] = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. De plus, $\forall n \neq m$

$$\mathbb{E}[X_n X_m] = \frac{\alpha^2}{2}\cos(a(n-m)) + \frac{\beta^2}{2}\cos(b(n-m))$$

$\to$ (X_n) est un processus stationnaire de fonction d'autocovariance γ donnée, $\forall n \in \mathbb{Z}$, par $\gamma(n) = \frac{\alpha^2}{2}\cos(an) + \frac{\beta^2}{2}\cos(bn)$.

2) $\gamma \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ car $\gamma(n)$ ne tend pas vers 0 qd $|n| \to +\infty$ donc (X_n) n'admet pas de densité spectrale.

3) La mesure spectrale associée à (X_n) est donnée par

$$\mu(dx) = \frac{\alpha^2}{4}(\delta_a(dx) + \delta_{-a}(dx)) + \frac{\beta^2}{4}(\delta_b(dx) + \delta_{-b}(dx))$$

car $\cos(an) = \frac{1}{2}(e^{ina} + e^{-ina}) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}(\delta_a(dx) + \delta_{-a}(dx))$.