Université de Bordeaux le 16/11/2011

PARTIEL
SÉRIES CHRONOLOGIQUES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) On a $\mathbb{E}[X_n] = s_n$, $Var(X_n) = \sigma^2$ et, pour tout $n \neq k$

$\rightarrow \mathbb{E}[X_n X_k] = \mathbb{E}[(s_n + \varepsilon_n)(s_k + \varepsilon_k)] = s_n s_k$ donc

$\Gamma(n,k) = Cov(X_n, X_k) = 0.$

2) On a $\mathbb{E}[X_n] = s_n$, $Var(X_n) = s_n^2 \sigma^2$ et, pour tout $n \neq k$

$\rightarrow \mathbb{E}[X_n X_k] = \mathbb{E}[s_n(1+\varepsilon_n) s_k(1+\varepsilon_k)] = s_n s_k$ donc

$\Gamma(n,k) = Cov(X_n, X_k) = 0.$

PROBLÈME II

1) On a $\mathbb{E}[X_n] = an^2 + bn + c + \sin(\theta + n\pi) = an^2 + bn + c + (-1)^n \sin(\theta)$

$\rightarrow$ On en déduit que (X_n) n'est pas stationnaire. En particulier, même si $a = b = 0$, on aura $\mathbb{E}[X_n] = c + (-1)^n \sin(\theta)$ qui dépendra toujours de n.

2) Soit $Y_n = \nabla_2 X_n = X_n - X_{n-2}$. On a

$\rightarrow$ $$Y_n = an^2 + bn + c + (-1)^n \sin(\theta) + \varepsilon_n - a(n-2)^2 - b(n-2) - c - (-1)^{n-2}\sin(\theta) - \varepsilon_{n-2}$$

$$Y_n = 4an - 4a + 2b + \varepsilon_n - \varepsilon_{n-2}$$

$\rightarrow$ On peut conclure que le processus (Y_n) n'a plus de tendance saisonnière

3) La tendance polynomiale n'a pas été éliminée. Elle

$\rightarrow$ a été remplacée par $\nabla_2(an^2+bn+c) = 4an - 4a + 2b$. Il est donc nécessaire de différentier le processus (Y_n).

4) On pose $Z_n = \Delta Y_n = Y_n - Y_{n-1}$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$Z_n = (X_n - X_{n-2}) - (X_{n-1} - X_{n-3})$$
$$= X_n - X_{n-1} - X_{n-2} + X_{n-3}$$

$\rightarrow$ On en déduit que $Z_n = 4a + \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-3}$

Le processus $Z_n = \Delta\nabla_2 X_n$ n'offre plus aucune tendance.

5) On a $\mathbb{E}[Z_n] = 4a$ et $Var(Z_n) = 4\sigma^2$. De plus, pour tout $k \neq n$

$$\Gamma(n,k) = Cov(Z_n, Z_k) = \mathbb{E}[(Z_n - 4a)(Z_k - 4a)]$$

$\rightarrow$ Si $k = n+1$ ou $k = n-1$, $\Gamma(n,k) = -\sigma^2$, si $k = n+2$ ou $k = n-2$ $\Gamma(n,k) = 0$ et si $k = n+3$ ou $k = n-3$, $\Gamma(n,k) = \sigma^2$. Sinon, on a $\Gamma(n,k) = 0$. Par suite, (Z_n) est stationnaire et

$$\gamma(n) = \begin{cases} 4\sigma^2 & \text{si } n = 0 \\ -\sigma^2 & \text{si } |n| = 1 \\ 0 & \text{si } |n| = 2 \\ \sigma^2 & \text{si } |n| = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

PROBLÈME III

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} f(x)\,dx$. Tout d'abord,

$$\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}(a-|x|)\,dx = \frac{1}{a^2}\left(2a^2 - 2\int_0^a x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(2a^2 - [x^2]_0^a\right) = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

$\rightarrow$ Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\gamma(n) = \int_{-a}^{a} e^{inx}\left(\frac{a-|x|}{a^2}\right)dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} e^{inx}\,dx - \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}|x| e^{inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{ina}\left[e^{inx}\right]_{-a}^{a} - \frac{2}{a^2}\int_0^a x\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{na}\sin(na) - \frac{2}{a^2}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^a + \frac{2}{a^2}\int_0^a \frac{\sin(nx)}{n}\,dx$$

$$= \frac{2}{a^2n^2}\left[-\cos(nx)\right]_0^a = \frac{2}{a^2n^2}\left(1-\cos(na)\right).$$

2) On a $f(0) = \frac{1}{a}$ et $f(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma(n) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{4}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(na)}{n^2}\right)$

donc $2\pi a = a^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(na)}{n^2}$. Cependant,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(na)}{n^2} = a^2 - 2\pi a + \frac{2\pi^2}{3} = (\pi-a)^2 - \frac{\pi^2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(na)}{n^2} = \frac{1}{4}(\pi-a)^2 - \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{12}\left(3(\pi-a)^2 - \pi^2\right).$$

PROBLÈME IV

1) On a $A(z) = 1 - 2\theta z + \theta^2 z^2 = (1-\theta z)^2$ donc $A(z) = 0$ ssi

$\rightarrow z = \frac{1}{\theta}$. A est causal ssi $\frac{1}{|\theta|} > 1$ donc $|\theta| < 1$.

2) Si $|\theta| < 1$, la densité spectrale de (X_n) est donnée, $\forall x \in \mathbb{T}$, par

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\,\frac{1}{|A(e^{-ix})|^2}$$

→ On en déduit que $\forall x \in \mathbb{T}$

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1+\theta^2 - 2\theta\cos x)^2}$$

car $|A(e^{-ix})| = |1-\theta e^{-ix}|^2 = 1+\theta^2 - 2\theta\cos x$.

3) Si $|\theta|<1$, A est causal et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|\theta z|<1$,

$$A^{-1}(z) = C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

→ avec $c_0 = 1$, $c_1 = 2\theta$ et, pour tout $k \geq 1$

$$c_{k+1} - 2\theta c_k + \theta^2 c_{k-1} = 0$$

→ L'équation caractéristique associée est $x^2 - 2\theta x + \theta^2 = 0$. On a une racine double $x_0 = \theta$. On a donc $(x-\theta)^2 = 0$. On a donc pour tout $k \geq 1$, $c_k = (a+bk)\theta^k$ avec $c_0 = a = 1$ et $c_1 = (a+b)\theta = 2\theta$ donc $b = 1$ ce qui implique $c_k = (1+k)\theta^k$.

→ On a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}$ donc, pour tout $n \geq 0$

$$\gamma(n) = \mathbb{E}[X_{n+k} X_k] = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_{n+k}$$

$$= \sigma^2 \theta^n \sum_{k=0}^{\infty} (1+n+2k+nk+k^2)\theta^{2k}$$

$$= \sigma^2\theta^n(1+n)\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{2k} + (n+2)\sigma^2\theta^n \sum_{k=0}^{\infty} k\theta^{2k} + \sigma^2\theta^n \sum_{k=0}^{\infty} k^2\theta^{2k}$$

$$= \frac{\sigma^2\theta^n(1+n)}{1-\theta^2} + \frac{\sigma^2\theta^n(n+2)\theta^2}{(1-\theta^2)^2} + \frac{\sigma^2\theta^n\theta^2(1+\theta^2)}{(1-\theta^2)^3}$$

$$= \frac{\sigma^2\theta^n}{(1-\theta^2)^3}\left\{(1+\theta^2) + n(1-\theta^2)\right\}.$$