PARTIEL
SÉRIES CHRONOLOGIQUES
CORRECTION

PROBLÈME I

1) Si n est un entier relatif pair, $X_n = \varepsilon_n$ et comme

→ $n+1$ est un entier relatif impair,

$$X_{n+1} = \xi_n = \frac{\varepsilon_n^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

→ Il est donc clair que X_n et X_{n+1} ne sont pas indépendantes donc (X_n) n'est pas constituée de variables aléatoires indépendantes

2) On a $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_n^2] = 1$. De plus, on a $\mathbb{E}[\varepsilon_n^4] = 3$

→ ce qui entraîne, $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$ et

$$\mathbb{E}[\xi_n^2] = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[\varepsilon_n^4] - 2\mathbb{E}[\varepsilon_n^2] + 1\right) = \frac{1}{2}(3-2+1) = 1$$

→ Par suite, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\mathbb{E}[X_n^2] = 1$.

→ Ensuite, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, si $|n-m| \geq 2$, X_n et X_m sont indépendantes donc $Cov(X_n, X_m) = 0$. Si $m = n+1$ et n pair
$Cov(X_n, X_{n+1}) = \mathbb{E}[X_n X_{n+1}] = \mathbb{E}[\varepsilon_n \xi_n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}[\varepsilon_n^3 - \varepsilon_n] = 0$ et si n impair, $Cov(X_n, X_{n+1}) = 0$. De même, si $m = n-1$, $Cov(X_n, X_{n-1}) = 0$

→ Finalement, (X_n) est stationnaire avec $\gamma(0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$, $\gamma(n) = 0$. On peut conclure que (X_n) est un BB de variance 1.

PROBLÈME II

1) On a $A(z)=0 \Leftrightarrow bz^2+az-1=0$. Le produit des racines de
→ ce polynôme vaut $-\frac{1}{b}$. Si $|b|\geq 1$, alors $\frac{1}{|b|}\leq 1$ donc
le produit des racines est ≤ 1 et A ne peut être causal.

2) Si $b=0$, alors $A(z)=1-az$ donc A est causal ssi
$\frac{1}{|a|}>1$ donc $|a|<1$. Ensuite, si $b\neq 0$, soit $\Delta=a^2+4b$.
→ Si $0<b<1$, $\Delta>0$ donc A possède 2 racines réelles

$$z_1=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2b} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2b}$$

→ Par suite, $|z_1|>1$ et $|z_2|>1$ ssi $|a+\sqrt{\Delta}|>2b$ et $|a-\sqrt{\Delta}|>2b$

- Si $a\geq 0$, $|a+\sqrt{\Delta}|\geq|a-\sqrt{\Delta}|$ donc il suffit de vérifier que
$|a-\sqrt{\Delta}|>2b \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}-a>2b \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}>a+2b$
$\Leftrightarrow \Delta>a^2+4ab+4b^2 \Leftrightarrow 1>a+b$
- Si $a\leq 0$, $|a-\sqrt{\Delta}|\geq|a+\sqrt{\Delta}|$ donc il suffit de vérifier que
$|a+\sqrt{\Delta}|>2b \Leftrightarrow a+\sqrt{\Delta}>2b \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}>2b-a$
$\Leftrightarrow \Delta>a^2-4ab+4b^2 \Leftrightarrow 1>-a+b$

→ Si $0<b<1$, le domaine est donné par $|a|<1-b$
→ Si $-1<b<0$, $\Delta>0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{4}<b<0$ et $|z_1|>1, |z_2|>1$ ssi
$|a+\sqrt{\Delta}|>-2b$ et $|a-\sqrt{\Delta}|>-2b$

- Si $a\geq 0$, $|a-\sqrt{\Delta}|>-2b \Leftrightarrow a-\sqrt{\Delta}>-2b \Leftrightarrow a+2b>\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow 1>a+b$
- Si $a\leq 0$, $|a+\sqrt{\Delta}|>-2b \Leftrightarrow -a-\sqrt{\Delta}>-2b \Leftrightarrow -a+2b>\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow 1>-a+b$

→ $\Delta=0 \Leftrightarrow b=-\frac{a^2}{4}$. Dans ce cas, $z_1=z_2=-\frac{a}{2b}=\frac{2}{a}$
Il faut donc que $\frac{2}{|a|}>1$, $|a|<2$

$\rightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow b<-\frac{a^2}{4}$. On a alors 2 racines complexes conjuguées (3)

$$z_1=\frac{-a-i\sqrt{-\Delta}}{2b} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-a+i\sqrt{-\Delta}}{2b}$$

$\rightarrow$ On a $|z_1|^2=|z_2|^2=-\frac{1}{b}>1$. Finalement, le domaine est donné par le triangle $|a|<1-b$ avec $|b|<1$.

3) Comme A est causal, on a pour tout $z\in\mathbb{C}$ avec
$\rightarrow |z|\leq r$ où $r>1$ est strictement inférieur au plus petit modules des racines de $A(z)$,

$$A^{-1}(z)=\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

avec $c_0=1$. On en déduit que $\forall n\in\mathbb{Z}$

$$X_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varepsilon_{n-k}$$

$\rightarrow$ Par suite, $\mathbb{E}[X_n]=0$. De plus, comme $(c_n)\in\ell^1(\mathbb{N})$, le processus (X_n) est stationnaire. Soit γ sa fonction d'autocovariance.

$\rightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$X_nX_{n-1}=aX_{n-1}^2+bX_{n-2}X_{n-1}+X_{n-1}\varepsilon_n$$

donc, par passage à l'espérance,

$$\gamma(1)=a\gamma(0)+b\gamma(1)\Rightarrow(1-b)\gamma(1)=a\gamma(0)\Rightarrow\rho(1)=\frac{a}{1-b}.$$

$\rightarrow$ De même, $\forall n\in\mathbb{Z}$

$$X_nX_{n-2}=aX_{n-1}X_{n-2}+bX_{n-2}^2+X_{n-2}\varepsilon_n$$

$$\gamma(2)=a\gamma(1)+b\gamma(0)\Rightarrow\rho(2)=a\rho(1)+b$$

$$\Rightarrow\rho(2)=\frac{a^2}{1-b}+b$$

$$\Rightarrow\rho(2)=\frac{a^2+b(1-b)}{1-b}.$$

PROBLÈME III

1) (X_n) est un processus MA d'ordre 1. On a donc, $\forall x \in \Pi$,

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(1+\theta^2+2\theta\cos(x)\right).$$

2) Le processus (X_n) est stationnaire de fonction d'autocovariance
→ donnée, $\forall n \in \mathbb{Z}$, par

$$\gamma(n) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } n=0 \\ \sigma^2\theta & \text{si } |n|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ On a donc

$$T_n(f) = \begin{pmatrix} \sigma^2(1+\theta^2) & \sigma^2\theta & & 0 \\ \sigma^2\theta & \sigma^2(1+\theta^2) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sigma^2\theta \\ 0 & & \sigma^2\theta & \sigma^2(1+\theta^2) \end{pmatrix}$$

→ Comme $T_n(f)$ est une matrice tridiagonale, il est clair que
$d_n = \sigma^2(1+\theta^2)d_{n-1} - (\sigma^2\theta)^2 d_{n-2} = \sigma^2(1+\theta^2)d_{n-1} - \sigma^4\theta^2 d_{n-2}$
avec $d_0 = 1$ et $d_1 = \sigma^2(1+\theta^2)$.

3) L'équation caractéristique associée à d_n est donnée par

$$x^2 - \sigma^2(1+\theta^2)x + \sigma^4\theta^2 = 0$$

→ $\Delta = \sigma^4(1+\theta^2)^2 - 4\sigma^4\theta^2 = \sigma^4(1-\theta^2)^2$, $\sqrt{\Delta} = \sigma^2(1-\theta^2)$

$$x_1 = \frac{\sigma^2(1+\theta^2)-\sigma^2(1-\theta^2)}{2} = \sigma^2\theta^2 \text{ et } x_2 = \frac{\sigma^2(1+\theta^2)+\sigma^2(1-\theta^2)}{2} = \sigma^2$$

→ On a donc $d_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n = \sigma^{2n}(\alpha\theta^{2n}+\beta)$ avec α, β donnés

par $\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha\theta^2+\beta = 1+\theta^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\dfrac{\theta^2}{1-\theta^2} \\ \beta = \dfrac{1}{1-\theta^2} \end{cases}$

→ Par suite, on a $d_n = \dfrac{\sigma^{2n}}{1-\theta^2}\left(1-\theta^{2n+2}\right)$.

4) Il en découle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{d_n}{d_{n-1}} = \sigma^2\left(\frac{1-\theta^{2(n+1)}}{1-\theta^{2n}}\right)$$

et, par passage au logarithme

$$\log d_n - \log d_{n-1} = \log \sigma^2 + \log(1-\theta^{2(n+1)}) - \log(1-\theta^{2n})$$

$$\log d_n = \sum_{k=1}^{n} \log d_k - \log d_{k-1} = n \log \sigma^2 + \log(1-\theta^{2n+2}) - \log(1-\theta^2)$$

car $d_0 = 1$ donc $\log d_0 = 0$. Par suite,

$$\frac{1}{n}\log d_n = \log \sigma^2 + \frac{1}{n}\left(\log(1-\theta^{2n+2}) - \log(1-\theta^2)\right)$$

et comme $\theta^2 < 1$, on peut conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log d_n = \log \sigma^2$$

PROBLÈME IV

1) Soit $A(z) = 1 - \theta z - \theta^2 z^2$. On a $\Delta = \theta^2 + 4\theta^2 = 5\theta^2$

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2\theta}$$

→ Le polynôme A est causal ssi $|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$

$$|z_1| > 1 \iff |\theta| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{et} \quad |z_2| > 1 \iff |\theta| < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

→ Il faut donc que $|\theta| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_2}{z-z_2}$$

→ Comme $\frac{1}{z-z_2} = a_1 + a_2\frac{(z-z_1)}{z-z_2}$, $a_1 = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{\theta}{\sqrt{5}}$

De même, $a_2 = -a_1 = \frac{-\theta}{\sqrt{5}}$

→ Comme $A(z) = -\theta^2(z-z_1)(z-z_2)$, on en déduit que

$$A^{-1}(z) = \frac{a_1}{\theta^2(z_1-z)} + \frac{a_2}{\theta^2(z_2-z)}$$

$$A^{-1}(z) = \frac{a_1}{\theta^2 z_1(1-\frac{z}{z_1})} + \frac{a_2}{\theta^2 z_2(1-\frac{z}{z_2})} = \frac{a_1}{\theta^2 z_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^k + \frac{a_2}{\theta^2 z_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = C(z)$$

avec

$$c_k = \frac{a_1}{\theta^2 z_1} z_1^{-k} + \frac{a_2}{\theta^2 z_2} z_2^{-k} = \frac{1}{\theta\sqrt{5}}\left(z_1^{-(k+1)} - z_2^{-(k+1)}\right).$$

→ On en déduit que

$$\gamma(0) = \mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \frac{\sigma^2}{5\theta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(z_1^{-(k+1)} - z_2^{-(k+1)}\right)^2$$

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{5\theta^2}\left\{ z_1^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} z_1^{-2k} + z_2^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} z_2^{-2k} - 2(z_1z_2)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(z_1z_2)^{-k}\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{5\theta^2}\left\{\frac{z_1^{-2}}{1-z_1^{-2}} + \frac{z_2^{-2}}{1-z_2^{-2}} + 2\theta^2\sum_{k=0}^{\infty}(-\theta^2)^k\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{5\theta^2}\left\{\frac{1}{z_1^2-1} + \frac{1}{z_2^2-1} + \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}\right\} = \frac{\sigma^2(1-\theta^2)}{(1+\theta^2)(1-3\theta^2+\theta^4)}.$$

3) Il en découle, via le problème II, que

→ $$\gamma(1) = \frac{\theta}{1-\theta^2}\gamma(0) = \frac{\sigma^2\theta}{(1+\theta^2)(1-3\theta^2+\theta^4)}$$

→ $$\gamma(2) = \frac{\theta^2(2-\theta^2)}{1-\theta^2}\gamma(0) = \frac{\sigma^2\theta^2(2-\theta^2)}{(1+\theta^2)(1-3\theta^2+\theta^4)}.$$