UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **Le 22/11/2010**
MASTER 2, 2010/2011

PARTIEL
SÉRIES CHRONOLOGIQUES

Durée 2 heures

PROBLÈME I

4 points

On considère le processus aléatoire (X_n) défini par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$X_n = an^2 + bn + c + \varepsilon_n$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi centrée et de variance σ^2. On note Δ l'opérateur de différenciation $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$, de sorte que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\Delta^2 X_n = \Delta(\Delta X_n) = \Delta(X_n - X_{n-1}) = X_n - 2X_{n-1} + X_{n-2}.$$

1) Montrer que le processus (X_n) n'est pas stationnaire sauf si $a = b = 0$.

2) Vérifier que (Y_n) défini par $Y_n = \Delta X_n$ n'est pas stationnaire sauf si $a = 0$.

3) Montrer que le processus (Z_n) donné par $Z_n = \Delta^2 X_n$ est stationnaire et déterminer sa fonction d'autocovariance.

PROBLÈME II

3 points

Soit $0 < a \leqslant \pi$ et (X_n) le processus stationnaire dont la densité spectrale est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } \ |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Trouver la fonction d'autocovariance associée à (X_n).

2) En déduire l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n^2} = \frac{1}{12}(3(\pi - a)^2 - \pi^2).$$

PROBLÈME III

5 points

On considère le processus autorégressif d'ordre deux défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = aX_{n-1} + bX_{n-2} + \varepsilon_n$$

où les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. On lui associe, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme $A(z) = 1 - az - bz^2$. On rappelle que A est causal si toutes ses racines sont à l'extérieur du disque unité.

1) Vérifier que si $|b| \geqslant 1$, alors A ne peut être causal.

2) Montrer que A est causal si et seulement si le couple (a, b) appartient au triangle donné par $|b| < 1$ et $|a| < 1 - b$ et tracer ce triangle.

3) Si A est causal, donner la densité spectrale associée à (X_n).

PROBLÈME IV

3 points

On considère le processus autorégressif d'ordre un défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_n &=& \theta X_{n-1} + \varepsilon_n \\ \varepsilon_n &=& \rho \varepsilon_{n-1} + V_n \end{array} \right.$$

avec $|\theta| < 1$ et $|\rho| < 1$, où (V_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a la relation

$$X_n = (\theta + \rho)X_{n-1} - \theta\rho X_{n-2} + V_n.$$

2) Vérifier que ce processus autorégressif d'ordre deux est causal.

PROBLÈME V

5 points

On considère le processus (X_n) défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \alpha \cos(an + U) + \beta \cos(bn + V)$$

avec $-\pi < a < b < \pi$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, où U et V sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1) Montrer que (X_n) est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

2) Vérifier que (X_n) n'admet pas de densité spectrale.

3) Calculer la mesure spectrale associée à (X_n).