UNIVERSITÉ DE BORDEAUX MASTER 2, 2010/2011
MSE2311 SÉRIES CHRONOLOGIQUES

STATIONNARITÉ DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

1 Somme.

Soit (X_t) une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et $\mathbb{E}[X_t^2] = \sigma^2$. Pour tout $t \geqslant 1$, on pose

$$S_t = \sum_{k=1}^{t} X_k.$$

Montrer que le processus (S_t) n'est pas stationnaire.

2 Produit.

Soit (X_t) une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et $\mathbb{E}[X_t^2] = 1$. Pour tout $t \geqslant 0$, on pose

$$P_t = \prod_{k=0}^{t} X_k.$$

Montrer que (P_t) est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

3 Cosinus.

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, centrées et de variance 1. Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ et pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on pose

$$X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t).$$

Montrer que (X_t) est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

4 Processus autorégressif.

On considère le processus autorégressif défini, pour tout $t \geqslant 0$, par

$$X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $|\theta| < 1$ et (ε_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$. On suppose que X_0 est indépendante de (ε_t) et de loi $\mathcal{N}(m, \tau^2)$.

1) Montrer que, pour tout $t \geqslant 1$, $X_t = \theta^t X_0 + \sum_{k=1}^{t} \theta^{t-k}\varepsilon_k$.

2) Déterminer la loi de X_t.

3) Trouver les valeurs de m et τ^2 afin que (X_t) soit strictement stationnaire.

4) Dans ce cas, calculer sa fonction d'autocovariance.

5 Processus linéaire.

Soit (ε_t) une suite de variables aléatoires centrées, non corrélées et de variance σ^2. Soit (a_t) une suite de nombres réels et (X_t) le processus défini, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varepsilon_{t-k} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^2 < \infty$$

Montrer que (X_t) est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

6 Processus moyenne mobile.

Soit (ε_t) une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et de carré intégrable avec, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$. On considère le processus moyenne mobile défini, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

1) Montrer que (X_t) est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

2) Le processus (X_t) est-il strictement stationnaire ?

7 Box-Muller.

L'algorithme de Box-Muller permet la génération de variables aléatoires gaussiennes à partir de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$X = \sqrt{-2 \log U} \cos(2\pi V) \qquad \text{et} \qquad Y = \sqrt{-2 \log U} \sin(2\pi V).$$

Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

8 Processus gaussien.

Soit (X_t, Y_t) un processus gaussien stationnaire de moyenne m et de matrice de covariance Γ données, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $|r| < 1$, par

$$m = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer la densité de probabilité du couple (X_t, Y_t).

2) Trouver la loi conditionnelle de Y_t sachant X_t.

3) Quelle est la loi de la variable aléatoire

$$V_t = \frac{(X_t - a)^2 - 2r(X_t - a)(Y_t - b) + (Y_t - b)^2}{(1 - r^2)}.$$