UNIVERSITÉ DE BORDEAUX MASTER 2, 2010/2011
MSE2311 SÉRIES CHRONOLOGIQUES

PROCESSUS ARMA

1 Autocorrélation.

On considère le processus ARMA défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = aX_{n-1} + b\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$, où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}$$

avec (c_n) à déterminer.

2) En déduire que la fonction d'autocorrélation associée à (X_n) est donnée par

$$\rho(1) = \frac{(1+ab)(a+b)}{1+b^2+2ab}$$

et, pour tout $n \geqslant 1$, $\rho(n) = a^{n-1}\rho(1)$.

2 Autocorrélation partielle.

On considère le processus moyenne mobile défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \theta\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

avec $|\theta| < 1$ et (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer via les équations de Yule-Walker que la meilleure prédiction linéaire de X_{n+1} sur l'enveloppe linéaire engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ est

$$\widehat{X}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k X_{n+1-k}$$

où $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ vérifient, pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-1$, la relation de récurrence

$$\theta\Phi_{k-1} + (1+\theta^2)\Phi_k + \theta\Phi_{k+1} = 0$$

avec les conditions au bord $(1+\theta^2)\Phi_1 + \theta\Phi_2 = \theta$ et $(1+\theta^2)\Phi_n + \theta\Phi_{n-1} = 0$. En déduire que la fonction d'autocorrélation partielle de (X_n) est donnée, pour tout $n \geqslant 1$, par

$$\alpha(n) = -\frac{(-\theta)^n(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(n+1)}}.$$

3 Calculation.

On considère le processus ARMA défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = X_{n-1} - \frac{1}{4}X_{n-2} + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Trouver la suite (c_n) telle que le processus (X_n) s'écrive sous la forme

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

2) Calculer la fonction d'autocorrélation associée à (X_n).

4 Complexe.

Trouver la fonction d'autocovariance du processus autorégressif d'ordre 2

$$X_n = X_{n-1} - \frac{1}{2}X_{n-2} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

5 Nombre d'Or.

On considère le processus autorégressif d'ordre 2 défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \theta X_{n-1} + \theta^2 X_{n-2} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) est un bruit blanc de variance σ^2. Trouver l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles (X_n) est causal puis déterminer sa fonction d'autocovariance.

6 Processus autorégressif explosif.

On considère le processus autorégressif stationnaire défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n$$

où $|\theta| > 1$ et (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Montrer que (X_n) satisfait la relation anticipative

$$X_n = -\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{-1} \varepsilon_{n+k}.$$

2) Prouver que la fonction d'autocovariance de (X_n) est donnée, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$\gamma(n) = \frac{\sigma^2 \theta^{-|n|}}{\theta^2 - 1}.$$

3) En déduire que (X_n) vérifie la relation autorégressive causale

$$X_n = \theta^{-1} X_{n-1} + V_n$$

où (V_n) est un bruit blanc de variance τ^2 à déterminer.