

Curriculum Vitae

ETAT CIVIL

Gilles Carbou

né le 11 mai 1969 à Villecresnes (94)

20, rue Gabriel Fauré

33400 Talence

email : carbou@math.u-bordeaux.fr

page web : <http://www.math.u-bordeaux.fr/~carbou/>

Tel: 05 40 00 21 31

Position actuelle

Maître de conférences,

Institut de Mathématiques de Bordeaux,

Université Bordeaux 1.

351 cours de la Libération

33405 Talence cedex

CARRIERE UNIVERSITAIRE

1989-1993 : Elève à l'Ecole Normale Supérieure de Paris

1992 : Agrégation de mathématiques (reçu 3^{ième})

1993-1994 : Allocataire Moniteur Normalien à l'ENS de Cachan

1994-1995 : Service National à l'ENSTA (Palaiseau)

1995-1996 : AMN à l'ENS de Cachan

1995 : Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan (soutenue le 29 septembre 1995), sous la direction de Frédéric Hélein, "problèmes d'analyse linéaire et non linéaire issus de la physique ou de la géométrie", devant le jury composé de F. Bethuel, G. David (rapporteur), R. Hardt (rapporteur), F. Hélein, B. Helffer, S. Hildebrandt (président), M. Lenoir.

1996 : Recrutement en tant que maître de conférences en section 26 à l'Université Bordeaux 1

1998 : Promotion en première classe (au niveau national)

Prime de recherche et d'encadrement doctoral depuis septembre 1998.

2003 : Habilitation à diriger des recherches, soutenue le 12 décembre 2003, à l'Université Bordeaux 1, "Couches limites en ferromagnétisme et en mécanique des fluides"

Membres du jury : N. Ben Abdallah, F. Bethuel, P. Fabrie, E. Grenier (rapporteur), B. Hanouzet (président), H. Kaper (rapporteur) et G. Métivier (rapporteur).

2005 : Délégation CNRS (un semestre)

PUBLICATIONS :

Mémoire de thèse de l'ENS de Cachan, "problèmes d'analyse linéaire et non linéaire issus de la physique ou de la géométrie" (1995)

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Bordeaux 1, "Couches limites en ferromagnétisme et en mécanique des fluides" (2003)

Publications dans des revues avec comité de lecture : 16 publiées, 2 soumises

Lettres ou notes : 5

Congrès avec actes : 6

THEMATIQUES DE RECHERCHES

Equations aux dérivées partielles, modélisation, équations de Landau-Lifschitz, équations de Maxwell non linéaires, équations de Navier Stokes

Méthodes asymptotiques, couches limites, couches minces, modèles de pénalisation, modèles de relaxation
Ferromagnétisme, électromagnétisme, mécanique des fluides

ANIMATION DE LA RECHERCHE

Encadrement doctoral :

- Encadrement à 50 % de la thèse de David Sanchez (avec Pierre Fabrie), "Méthodes asymptotiques en ferromagnétisme", soutenue le 7 décembre 2004.

Cette thèse a donné lieu à 6 publications de D. Sanchez :

- D. Sanchez, *Phénomène de couche limite dans un modèle de ferromagnétisme*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Série 6, **11** (2002), 239-261.
- D. Sanchez, *Behaviour of Landau-Lifschitz Equation in a periodic thin layer*, Asymptot. Anal. **41** (2005), no. 1, 41-69
- D. Sanchez, *Long waves in ferromagnetic media, Zabolotskaya-Khokhlov equation*, J. Differential Equations **210** (2005), no. 2, 263-289
- D. Sanchez, *Thin Layer for Landau-Lifschitz Equation*, Dynamic systems and applications. Vol. 4, 239-244, Dynamic, Atlanta, GA, 2004
- D. Sanchez, *Behaviour of the Landau-Lifschitz equation in a ferromagnetic wire*, à paraître dans M2AS.
- D. Sanchez, *Numerical study of long waves in ferromagnetic media*, Numer. Methods Partial Differential Equations **22** (2006), no. 5, 1127-1148.

D. Sanchez est actuellement maître de conférences à l'INSA de Toulouse.

- en 2006, encadrement de la première année de thèse de Gaël Bonithon, qui a donné lieu à une publication :

- G. Bonithon, *Landau-Lifschitz-Gilbert Equation with Applied Electric Current*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Supplement (2007), 138-144.

G. Bonithon est actuellement en deuxième année de thèse à l'ESTIA de Bayonne.

- En prévision : sujet de thèse concernant le modèle de Kerr Debye proposé à M. Kanso, actuellement en stage de Master recherche.

Encadrements de master recherches et de Projets de Fin d'Etude à l'école MATMECA

- en 2008 : encadrement du mémoire de MASTER recherche de Mohammed Kanso : "Existence globale à données petites pour le problème de Kerr-Debye".

- en 2005 : encadrement du mémoire de MASTER recherche de Gaël Bonithon : "Couches limites dans un domaine non régulier, application pour les guides d'ondes".

- en 2001 : encadrement à 50 % du mémoire de DEA de David Sanchez (avec Pierre Fabrie) : "Diffraction d'une onde électromagnétique sur un domaine de conductivité élevée", ce qui a donné lieu à une publication :

- D. Sanchez, *Boundary layer on a high-conductivity domain*, Commun. Pure Appl. Anal. **1** (2002), 547-564.

- en 2001 : tuteur universitaire de José Dos Santos pour son projet de fin d'étude de l'école d'ingénieurs MATMECA : "traitement numérique de la propagation dans les fibres optiques"

- en 2002 : tuteur universitaire de Hanabelle Guillot pour son projet de fin d'étude de l'école d'ingénieurs MATMECA : "inversion de modèles stratigraphiques"

- en 2003 : tuteur universitaire de Grégory Haboussa pour son projet de fin d'étude de l'école d'ingénieurs MATMECA : "Compréhension et analyse de la mesure d'un capteur lors d'un impact sur eau : développement d'une solution quasi-analytique d'un écoulement biphasique"

Cours de master recherche ou de troisième cycle :

- Cours de Master Recherche en 2007-2008 : "Méthodes asymptotiques pour les modèles de relaxation"

- Cours de Master Recherche en 2004-2005 et 2005-2006 : "Etude de couches limites et de couches minces en ferromagnétisme et en mécanique des fluides"

- Cours post doctoral en mars 2004, à l'Université Paris 11 (Orsay) : "Couches limites pour les méthodes de pénalisation en mécanique des fluides".

- Cours de DEA en 1998-1999 et 1999-2000 : "Résultats récents en ferromagnétisme".

Jury de thèse :

- Membre du jury de thèse de Houssein Haddar "Modèles asymptotiques en ferromagnétisme : couches minces et homogénéisation", soutenue en 2000 à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

- Membre du jury de thèse de David Sanchez, "Méthodes asymptotiques en ferromagnétisme", soutenue le 7 décembre 2004 à Bordeaux.

- Membre du jury de thèse de Jean Starynkévitch, "Problèmes d'asymptotique en temps en ferromagnétisme", soutenue le 29 juin 2006 à Bordeaux.

Organisation de congrès :

- Organisation des journées Bordeaux-Toulouse-Pau de Mathématiques Appliquées (en juin 1999, octobre 2000, et octobre 2001)

- Membre du comité d'organisation du colloque "systèmes hyperboliques et oscillations" en l'honneur de Jean-Luc Joly (Bordeaux, septembre 2002)

- Organisation des rencontres "modélisation du micromagnétisme" au CIRM (Marseille, décembre 2002)

ACTIVITES ADMINISTRATIVES

Concernant la recherche :

- Responsable scientifique sur le site de Bordeaux du projet ANR SICOMAF (simulation et contrôle des matériaux ferromagnétiques, coordinateur national : S. Labbé) depuis 2006.

- Membre de la commission de spécialistes (section 26) de l'Université Bordeaux 1, depuis 1998.

- Vice-président B de la commission de spécialistes (section 26) de l'Université Bordeaux 1, depuis 2004.

- Membre extérieur de la commission de spécialistes (sections 25-26) de l'Université de La Rochelle (1998-2001).

- Membre extérieur de la Commission de spécialistes (sections 25-26) de l'Université de Nice (2002-2005).
- Responsable du séminaire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux 1 de septembre 1997 à décembre 1998.

Concernant l'enseignement :

- Responsable de la licence de mathématiques appliquées de septembre 2002 à septembre 2007.
- Rédacteur de l'habilitation de la licence d'ingénierie mathématique pour la période 2003-2007.
- Coordinateur des TER (Travaux Encadrés de Recherche) en licence d'ingénierie mathématique.
- Membre du comité de pilotage du Cycle Préparatoire du Polytechnicum de Bordeaux, responsable de l'enseignement des mathématiques jusqu'en juin 2003.
- Membre de la commission de programme du premier cycle (en 1998-1999) puis de la cellule 3-5-8 de l'UFR Maths-info (en 2002-2003).

Participation aux instances de l'Université :

- Membre du Conseil des Études et de la Vie Universitaire de Bordeaux 1 de décembre 1999 à décembre 2003.
- Membre du conseil de l'UFR de Mathématiques et Informatique depuis mars 2004.

ACTIVITES D'ENSEIGNEMENT

- Cours à l'école d'ingénieurs MATMECA : "optimisation" en deuxième année (niveau bac + 4), "calcul différentiel" en première année (niveau bac + 3).
- Cours en licence d'ingénierie mathématique : "algèbre et de Géométrie", "Calcul différentiel" et "intégration" en 3^{ème} année (niveau bac + 3).
- TD en master d'ingénierie mathématique : "analyse complexe", "distributions" et "EDP" (niveau bac + 4).
- TD à l'école MATMECA : "EDP" en deuxième année, "calcul différentiel", "intégration" et "systèmes dynamiques" en première année.
- TD en licence d'ingénierie mathématique : d'algèbre et d'analyse en première année de licence de mathématiques, de calcul différentiel, d'intégration et d'analyse fonctionnelle en troisième année de licence d'ingénierie mathématique.
- Encadrement de Travaux Encadrés de Recherche en licence et en maîtrise de mathématiques appliquées, et à l'école MATMECA.

Publications dans des revues avec comité de lecture

- [A1] G. Carbou, *Regularity for a nonlinear variational problem in dimension two*, Manuscripta Math. **78** (1993), 37–56.
- [A2] G. Carbou, *Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire **3** (1995), 305-318.
- [A3] G. Carbou, *Regularity for critical points of a non local energy*, Calculus of Variations **5** (1997), 409-433.
- [A4] G. Carbou, P. Fabrie, *Time Average in Micromagnetism*, J. Differential Equations **147** (1998), 383–409
- [A5] G. Carbou, P. Fabrie, *Regular Solutions for Landau-Lifschitz Equation in a Bounded Domain*, Differential Integral Equations **14** (2001), 213–229
- [A6] G. Carbou, P. Fabrie, *Regular Solutions for Landau-Lifschitz equation in \mathbb{R}^3* , Commun. Appl. Anal. **5** (2001), no. 1, 17–30.
- [A7] G. Carbou, *Thin Layers in Micromagnetism*, Math. Models and Meth. in Applied Sciences **11** (2001), 1529–1546
- [A8] V. Bruneau, G. Carbou, *Spectral asymptotic in Large Limit Coupling*, Asymptot. Anal. **29** (2002), no. 2, 91–113.
- [A9] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *Couche limite en ferromagnetisme*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 7-8, 1467–1495.
- [A10] G. Carbou, P. Fabrie, *Boundary layers for a penalisation method for incompressible flow*, Adv. Differential Equations **8** (2003), no. 12, 1453–1480.
- [A11] G. Carbou, *Penalization method for viscous incompressible flow around a porous thin layer*, Non linear analysis, Real Word Applications **5** (2004), 815–855.
- [A12] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *On the ferromagnetism equations in the non static case*, Commun. Pure Appl. Anal. **3** (2004), no. 3, 367–393
- [A13] G. Carbou, S. Labbé, *Stability for Static wall in a ferromagnetic Nanowire*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **6** (2006), no. 2, 273–290.
- [A14] G. Carbou, B. Hanouzet, *Relaxation approximation of some nonlinear Maxwell initial-boundary value problem*, Commun. Math. Sci. **4** (2006), no. 2, 331–344.
- [A15] G. Carbou, *Brinkmann Model and Double Penalization Method for the flow around a Porous Thin Layer*, J. Math. Fluid Mech. **10** (2008), no. 1, 126–158.
- [A16] G. Carbou, B. Hanouzet, *Relaxation Approximation of some Initial-Boundary Value Problem for p -Systems*, Communications in Math. Sciences, **5** (2007), no. 1, 187–203.

Articles soumis :

- [S1] G. Carbou, M. Effendiev, P. Fabrie, *Relaxed model for the hysteresis in micromagnetism*.
- [S2] G. Carbou, B. Hanouzet, R. Natalini, *Semilinear Behavior for Totally Linearly Degenerate Hyperbolic Systems with Relaxation*.

Article en préparation :

- [P1] G. Carbou, B. Hanouzet, *Relaxation approximation of the Kerr Model for the three dimensional*

[P2] G. Carbou, S. Labbé, *Modèle de nanofil fini en ferromagnétisme.*

Lettres ou notes :

[B1] G. Carbou, *Applications harmoniques à valeurs dans un cercle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), no. 5, 359–362.

[B4] G. Carbou, P. Fabrie, F. Jochmann, *A remark on the Weak ω -Limit Set for Micromagnetism Equation*, Applied Math. Letters **15** (2002), 95–99.

Notes d'annonce de résultats publiés par ailleurs :

[B2] G. Carbou, P. Fabrie *Comportement asymptotique des solutions faibles des équations de Landau-Lifschitz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 7, 717–720.

[B3] G. Carbou, *Modèle quasi-stationnaire en micromagnétisme*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 8, 847–850

[B5] G. Carbou, B. Hanouzet, *Comportement semi-linéaire d'un système hyperbolique quasi-linéaire : le modèle de Kerr-Debye*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, 343 (2006), 243-247.

Congrès avec actes :

[C1] G. Carbou, *Quelques résultats théoriques sur les équations de Landau-Lifschitz*, Colloque d'Analyse Numérique, Arles 1998, Symposium sur le Micromagnétisme.

[C2] G. Carbou, P. Fabrie, *Recent results in micromagnetism*, International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), 738–740.

[C3] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *Boundary Layers for Landau-Lifschitz Equations*, Physica B, **343** (2004) 331–336 (actes du congrès Hysteresis and Micromagnetism Modeling, Salamanca 2003).

[C4] G. Carbou, S. Labbé, *Stability for walls in Ferromagnetic Nanowire*, Numerical Mathematics and Advanced Application, Proceedings of Enumath 2005, Santiago de Compostela, Spain, July 2005, Springer.

[C5] G. Carbou, B. Hanouzet, *Relaxation Approximation of the Kerr-Debye Model for the Impedance Initial-Boundary Value Problem*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Supplement (2007), 212–220.

[C6] G. Carbou, S. Labbé, E. Trélat, *Control of travelling walls in a ferromagnetic nanowire*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **1** (2008), no. 1, 51–59.

Séminaires et conférences depuis 2000

Novembre 2000 : Nice (journées Nice-Toulon-Marseille)

Septembre 2002 : Bordeaux (colloque Joly)

Octobre 2002 : Orsay (séminaire d'analyse)

Décembre 2002 : Marseille (rencontres sur le ferromagnétisme au CIRM)

Février 2003 : Cambridge (Newton institute workshop : Computational electromagnetism)

Mai 2003 : Salamanque (congrès Hysteresis and Micromagnetic Modeling 2003)

Juin 2003 : Ecole polytechnique (séminaire d'analyse numérique)

Novembre 2003 : Université de Lille (journée électromagnétisme)

Janvier 2004 : Université de Trento (Italie)

Juillet 2005 : Santiago de Compostela (congrès ENUMATH 2005)

Juin 2006 : ENSTA Paris, Journée Techniques Asymptotiques

Juin 2006 : Poitiers, congrès AIMS

Mai 2007 : Université de Rome (Italie), congrès INdAM "Nonlinear Hyperbolic Problems, a perspective view on conservation laws"

Juin 2007 : Orsay, journée de l'ANR SICOMAF

Durant ma thèse, j'ai travaillé sur des équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. En particulier, j'ai étudié la régularité des points critiques de la fonctionnelle du micromagnétisme.

J'ai ensuite travaillé sur les modèles non stationnaires du micromagnétisme décrits par l'équation de Landau-Lifschitz, équations aux dérivées partielles vectorielle, parabolique fortement non linéaire. Après avoir montré des résultats d'existence de solutions, j'ai étudié des problèmes asymptotiques : obtention de modèles de couches minces, comportement des solutions lorsque le coefficient d'échange tend vers zéro. J'ai à cette occasion développé des techniques (développements asymptotiques de couches limites et de couches minces via des méthodes BKW) que j'ai utilisées en mécanique des fluides pour des modèles de pénalisation, et dans l'études de guides d'ondes. C'est sur ces travaux que porte mon habilitation à diriger des recherches soutenue en 2003.

Depuis 2003, dans le cadre de l'ANR Sicomaf, j'étudie des modèles de fils ferromagnétiques pour décrire la dynamique et la contrôlabilité des structures de murs. Je travaille aussi sur l'équation de Kerr-Debye, qui est un modèle de relaxation du système de Kerr. Ces modèles sont de type hyperboliques quasilineaires. Mes travaux dans cette thématique portent sur des problèmes de convergence lorsque le coefficient de relaxation tend vers zéro, et sur le comportement très particulier du système de Kerr-Debye qui, bien qu'étant quasilineaire, se comporte comme un système semilineaire.

Les références citées ci-après sont décrites dans ma liste de publications en pages 5 et 6.

1. Problèmes elliptiques non linéaires, régularité.

Pendant ma thèse, j'ai étendu des résultats de régularité des applications faiblement harmoniques à valeurs dans une variété à des situations plus complexes.

Dans [A1], j'ai obtenu un résultat de régularité des sections harmoniques en dimension 2. La démonstration de ce théorème nécessite l'utilisation de techniques géométriques comme le théorème de plongement de Nash-Moser, ou la construction de repères mobiles, et fait appel à des outils surtout connus en analyse harmonique, comme les espaces de Lorentz ou des résultats de compensation.

Dans [A3], j'ai étudié en dimension 3 les points critiques de l'énergie du ferromagnétisme. J'ai démontré que les points critiques stationnaires (non minimisant en général) de cette énergie sont réguliers sauf sur un ensemble dont la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle est nulle.

L'article [A2] répond à des conjectures proposées par l'astrophysicien Gibbons concernant l'équation de Ginzburg-Landau scalaire. J'ai notamment obtenu un résultat d'unicité de type Liouville, et grâce à une transformation du type symétrisation de Steiner, j'ai démontré qu'une solution particulière était minimisante.

2. Equation de Landau-Lifschitz en micromagnétisme.

Les matériaux ferromagnétiques sont utilisés notamment pour l'enregistrement de données informatique, ou comme peinture d'avions pour améliorer la furtivité radar. Ce sont des matériaux non linéaires caractérisés par une magnétisation spontanée représentée par un champ de vecteurs u de norme constante égale à 1. Ce moment relie le champ et l'induction magnétique par la relation $B = \eta(H + \bar{u})$, où \bar{u} est le prolongement de u par zéro en dehors de Ω , ouvert dans lequel est confiné le matériaux ferromagnétique.

Les phénomènes non stationnaires en micromagnétismes sont décrits par l'équation de Landau-Lifschitz :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u \wedge H_{eff} - u \wedge (u \wedge H_{eff}) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Le champ effectif H_{eff} est dérivé de l'énergie du micromagnétisme. Il est donné par

$$H_{eff} = \varepsilon^2 \Delta u + H + \psi(u) \quad (2)$$

où H est le champ magnétique et où ψ est un terme local d'anisotropie. Le coefficient ε^2 appelé coefficient d'échange est petit, ce qui justifie l'étude asymptotique explicitée dans la partie 2.3.

L'équation de Landau-Lifschitz est couplée avec les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \eta \frac{\partial}{\partial t} (H + \bar{u}) + \operatorname{rot} E = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \\ \eta \frac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{rot} H = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (3)$$

Lorsque l'échantillon de matériau ferromagnétique est petit, un autre modèle proposé par les physiciens consiste à découper le champ magnétique en un champ appliqué H_a plus le champ démagnétisant $h_d(u)$ vérifiant les équations de Maxwell stationnaires :

$$\begin{cases} h_d(u) \in L^2(\mathbb{R}^3) \\ \operatorname{rot} h_d(u) = 0 \\ \operatorname{div}(h_d(u) + \bar{u}) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

L'équation de Landau-Lifschitz s'apparente à une équation parabolique fortement non linéaire qui propage la contrainte physique $|u| = 1$ tout en tendant à aligner le moment magnétique u avec le champ effectif H_{eff} .

2.1. Solutions faibles

En collaboration avec Pierre Fabrie, on montre dans [A4] l'existence globale en temps des solutions faibles du système (1)-(3). De plus, on caractérise l'ensemble ω -limite des solutions, par une méthode de moyennisation en temps. Les éléments de cet ensemble ω -limite sont les points critiques de l'énergie du ferromagnétisme dont on avait étudié la régularité dans [A3]. Enfin, on justifie dans [A4] l'approximation quasistationnaire qui consiste à remplacer les équations de Maxwell (3) par la relation (4). Ces résultats sont démontrés sans méthode de moyennisation dans [B4], lorsque l'on tient compte d'une conductivité non nulle dans une partie du matériau ferromagnétique.

2.2. Existence de solutions fortes

L'existence locale de solutions régulières, à ε fixé, est montrée dans [A6] dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^3$, en utilisant une méthode de discrétisation par différences finies.

Dans le cas où Ω est un ouvert borné, on montre dans [A5] l'existence locale de solutions régulières pour le modèle quasistationnaire (1)-(4). La preuve de ce résultat utilise de manière cruciale la contrainte $|u| = 1$, puisqu'on remarque que pour u régulière de norme 1, l'équation de Landau-Lifschitz est équivalente à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u = \varepsilon^2 u |\nabla u|^2 + \varepsilon^2 u \wedge \Delta u + u \wedge H - u \wedge (u \wedge H)$$

équation qui a le mérite de mettre en évidence la dissipation due au laplacien.

En utilisant la même forme équivalente pour l'équation de Landau-Lifschitz, on montre dans [A12] l'existence locale de solution forte pour le système Landau-Lifschitz-Maxwell (1)-(3). Pour démontrer ce résultat, on est amené à faire la décomposition de Hodge du champ magnétique H : $H = H_{\parallel} + H_{\perp}$, où $\operatorname{rot} H_{\parallel} = 0$ et $\operatorname{div} H_{\perp} = 0$. On montre alors que la partie H_{\parallel} , correspondant au champ démagnétisant, vérifie (4) et est traitée comme dans le cas du modèle quasistationnaire (*cf.* [A5]). La partie H_{\perp} vérifie une équation d'onde que l'on peut estimer de manière classique.

2.3. Etude asymptotique lorsque ε tend vers zéro

Pour tenir compte de la petitesse du coefficient d'échange ε^2 , et pour justifier les modèles dans lesquels l'énergie d'échange est négligée, on étudie en collaboration avec Pierre Fabrie et Olivier Guès le comportement des solutions régulières u^ε du système (1)-(4) lorsque ε tend vers zéro. On montre que la suite des (u_ε) est non bornée dans H^2 , phénomène expliqué par la formation d'une couche limite au bord de Ω .

L'apparition de cette couche limite est due à l'incompatibilité entre la condition de Neuman homogène au bord vérifiée par les solutions de (1), et l'équation limite dont les solutions ne peuvent vérifier cette condition en général.

La couche limite est décrite par un développement asymptotique obtenu par une méthode BKW. On suppose que u admet un développement asymptotique de la forme :

$$u(t, x) = U^0(t, x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon U^1(t, x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots$$

où $\varphi(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, et où les profils se décomposent sous la forme

$$U^i(t, x, z) = \overline{U}^i(t, x) + \widetilde{U}^i(t, x, z)$$

où le terme de couche limite $\widetilde{U}^i(t, x, z)$ tend vers zéro quand z tend vers $+\infty$.

On injecte alors ce développement asymptotique dans les équations, puis en identifiant formellement les différentes puissances de ε , on caractérise les profils. Enfin, on justifie le développement obtenu par une estimation du reste.

Par exemple, on obtient que la solution u^ε du modèle quasistationnaire (1)-(4) admet un développement asymptotique de la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0(t, x) + \varepsilon \widetilde{U}^1(t, x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon R^\varepsilon(t, x)$$

où U^0 est la solution du problème limite (équation (1) en prenant $\varepsilon = 0$), où le terme $\varepsilon \widetilde{U}^1$ est le terme de couche limite, exponentiellement décroissant en z , et où le reste $\varepsilon R^\varepsilon$ tend vers zéro en norme H^1 et est borné en norme H^2 . On voit donc en particulier que lorsque ε tend vers zéro, le manque de compacité en norme H^2 est uniquement dû au terme de couche limite. On obtient aussi que le temps d'existence des solutions tend vers $+\infty$ lorsque ε tend vers zéro.

Cette étude est faite pour le modèle quasistationnaire dans [A9] et dans le couplage Maxwell-Landau-Lifschitz dans [A12].

Dans [A7], on étudie le comportement des matériaux ferromagnétiques en couche mince, dans les cas stationnaires et instationnaires. On montre que le champ démagnétisant H se localise lorsque l'épaisseur du matériau tend vers zéro, et que l'énergie démagnétisante tend vers une énergie d'anisotropie forçant le moment magnétique à être tangent à la couche mince du matériau.

2.4. Stabilité des murs

Les expériences physiques et les simulations numériques montrent que les échantillons de matériaux ferromagnétiques se structurent en domaines (dans lesquels le moment magnétique est presque constant) séparés par des parois (dans lesquelles le moment magnétique varie fortement). La formation de ces parois (murs de Bloch ou murs de Néel) est due à la compétition entre l'énergie d'échange et soit l'énergie démagnétisante, dans le cas des matériaux ferromagnétiques doux, soit l'énergie d'anisotropie.

Ce phénomène n'est encore que partiellement compris, même dans le cas stationnaire. Comme dans la modélisation des transitions de phases grâce à l'équation de Cahn-Hilliard, le passage à la limite du coefficient d'échange ε^2 vers zéro pourrait permettre à terme de comprendre la formation des parois.

Dans le cas non stationnaire, les travaux [A9] et [A12] décrivent uniquement les couches limites apparaissant au bord et non la formation et la dynamique des parois.

Dans [A13], en collaboration avec Stéphane Labbé, nous étudions un modèle monodimensionnel de mur statique, décrivant les configurations observées dans des fils ferromagnétiques. Le modèle est le suivant : le fil est assimilé à l'axe $\mathbb{R}e_1$, et le champ démagnétisant est approché par $h_d(u) = u_2 e_2 + u_3 e_3$. Ainsi le champ démagnétisant se comporte comme un champ d'anisotropie forçant le moment magnétique à être dans l'axe du fil. Les murs sont décrits dans ce modèle par des solutions stationnaires tendant vers $-e_1$ en $-\infty$ et vers $+e_1$ en $+\infty$. On montre que ces solutions sont stables pour les équations de Landau-Lifschitz, ce qui montre l'observabilité des configurations de murs. La difficulté principale de cette étude est due à l'invariance du problème par translation et par rotation autour de l'axe du fil. Ainsi, zéro est valeur propre d'ordre 2 pour le linéarisé, ce qui empêche une obtention directe de la stabilité.

2.5. Contrôle des murs

En prélude à l'ANR SICOMAF (simulation et contrôle des matériaux ferromagnétiques), et faisant suite à [A13], nous avons étudié des modèles de fils soumis à un champ magnétique extérieur, ce qui a pour effet de déplacer les murs. Nous avons montré dans [C4] la stabilité des murs qui se déplacent sous l'effet d'un petit champ extérieur appliqué. Nous avons aussi montré dans [C6] que la position des murs est contrôlable. Ces travaux sont des collaborations avec S. Labbé et E. Trélat.

3. Méthodes de pénalisation pour les fluides incompressibles

3.1. Convergence des méthodes de pénalisation

Les méthodes de pénalisation sont utilisées en mécanique des fluides numérique pour calculer un écoulement autour d'un obstacle. Pour approcher les solutions des équations de Navier Stokes autour de l'obstacle Ω (au bord duquel la vitesse est nulle), on résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} 1_\Omega u^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = f \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

où le paramètre de pénalisation $\frac{1}{\varepsilon^2}$ est très grand. L'avantage de cette méthode est qu'elle peut être mise en oeuvre avec des maillages réguliers (on ne doit plus adapter le maillage à la géométrie du domaine sur lequel on calcule l'écoulement).

Dans [A10], en collaboration avec Pierre Fabrie, nous montrons que l'erreur due à la méthode de pénalisation est de l'ordre de ε . Ce résultat est démontré en décrivant la couche limite qui apparaît dans l'obstacle pénalisé grâce à une méthode BKW. Sans description de cette couche limite, on obtient seulement la convergence de la méthode de pénalisation sans analyse de l'erreur. La description de la couche limite permet d'obtenir une estimation du type :

$$\|u^\varepsilon - U^0\|_{L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1)} \leq C\varepsilon$$

où U^0 est la solution du flot avec adhérence autour de l'obstacle Ω .

Remarquons que la couche limite due à la méthode de pénalisation est localisée à l'intérieur de l'obstacle et n'interfère donc pas avec l'écoulement.

3.2. Couches minces de matériau poreux

Dans [A11] et [A15], j'analyse les méthodes employées notamment par C.H. Bruneau et Iraj Mortazavi pour modéliser l'écoulement autour d'une couche mince de matériau poreux. On approche le flot par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\varepsilon} 1_{\omega_\varepsilon} u + \frac{1}{\varepsilon^2} 1_{\Omega_\varepsilon} u + \nabla \pi = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

où ω_ε est une couche mince d'épaisseur ε de matériau poreux de perméabilité $\frac{1}{\varepsilon}$, et où Ω_ε est l'obstacle affecté du coefficient de pénalisation $\frac{1}{\varepsilon^2}$, comme dans la méthode décrite dans la partie **3.1**.

En faisant un développement asymptotique des solutions, je démontre que le modèle obtenu correspond bien à l'écoulement autour d'une couche mince de matériau poreux avec une erreur d'ordre ε^2 , en comparant ce modèle à d'autres modèles décrits dans la littérature.

Ce résultat est obtenu en paramétrant la couche mince ω_ε par la variété $\Gamma \times]0, \varepsilon[$, où Γ est le bord de l'obstacle, et où $]0, \varepsilon[$ représente la direction transverse (d'épaisseur ε) de la couche mince. En faisant un changement d'échelle dans ces nouvelles coordonnées, on se ramène à un domaine invariant $\Gamma \times]0, 1[$, et on reporte le petit paramètre ε dans les équations. On peut alors par une méthode BKW obtenir un développement asymptotique dans l'échelle des ε^i de la solution.

On démontre ainsi la convergence de la méthode de pénalisation à deux échelles ainsi que sa pertinence vis à vis des autres modèles de flôt autour d'une couche mince poreuse.

4. Haute conductivité dans un guide d'ondes

En collaboration avec Vincent Bruneau, nous avons étudié dans [A8] un modèle scalaire de guide d'ondes fermé constitué d'un coeur de matériau supraconducteur entouré d'un isolant, lui-même confiné dans une gaine de conducteur parfait (pour que le guide d'onde soit fermé). Ce problème revient à étudier les valeurs propres sur $H_0^1(\mathcal{O})$ de l'opérateur :

$$\mathcal{H}^\varepsilon = -\Delta + \frac{1}{\varepsilon^2}1_\omega,$$

où $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ est la section du guide, et où $\frac{1}{\varepsilon^2}$ est la conductivité du coeur supraconducteur de section $\Omega \subset \mathcal{O}$.

On démontre que lorsque la conductivité $\frac{1}{\varepsilon^2}$ du coeur supraconducteur tend vers $+\infty$, les valeurs propres de \mathcal{H}^ε admettent un développement asymptotique à tout ordre en ε^i dont on sait exprimer tous les termes si en outre la valeur propre est simple.

Ce résultat est obtenu en décrivant sur les résolvantes la couche limite qui apparaît dans le coeur.

5. Modèles de Relaxation pour des systèmes quasilineaires

En collaboration avec Bernard Hanouzet, nous avons étudié la convergence de deux modèles de relaxation de systèmes hyperbolique quasi-linéaires : le système de Kerr- Debye et l'approximation de Suliciu des p -systèmes.

5.1. Modèle de Kerr-Debye

Le modèle de Kerr Debye décrit la propagation optique dans un milieu non linéaire en prenant en compte un temps de retard ε . Dans les équations de Maxwell, le déplacement électrique D est relié au champ électrique E par la relation $D = (1 + \chi)E$, où

$$\varepsilon \partial_t \chi + \chi = |E|^2.$$

Dans les expérimentations physiques, on étudie la propagation de l'onde lumineuse lorsqu'on éclaire le cristal. Ceci est décrit par le problème mixte suivant, posé dans $\mathbb{R}_t^+ \times \Omega_x$, où $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t D_\varepsilon - \operatorname{rot} H_\varepsilon = 0, \\ \partial_t H_\varepsilon + \operatorname{rot} E_\varepsilon = 0, \\ \partial_t \chi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (|E_\varepsilon|^2 - \chi_\varepsilon), \\ \text{avec } D_\varepsilon = (1 + \chi_\varepsilon)E_\varepsilon, \end{array} \right.$$

avec des données initiales nulles : $D_\varepsilon(0, x) = H_\varepsilon(0, x) = 0$, $\chi_\varepsilon(0, x) = 0$ pour $x \in \Omega$, et avec des conditions d'impédance au bord : $H_\varepsilon \wedge n + a((E_\varepsilon \wedge n) \wedge n) = \varphi$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$.

Quand ε tend vers zéro, on approche formellement le modèle de Kerr :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t D - \operatorname{rot} H = 0, \\ \partial_t H + \operatorname{rot} E = 0, \\ D = (1 + |E|^2)E. \end{array} \right.$$

Dans le cas du problème de Cauchy, la convergence est démontrée par P. Huyn et B. Hanouzet en utilisant des techniques de W. A. Yong, en décrivant la couche limite en temps apparaissant à $t = 0$. Dans [A14], nous montrons la convergence du modèle de Kerr-Debye vers le modèle de Kerr pour le problème mixte en dimension 1. Il s'agit du premier résultat de convergence d'un modèle de relaxation dans le cas du problème mixte. Ce résultat est étendu à la dimension 3 dans [C5]. Dans le cas du problème mixte, il n'y a pas apparition de couche limite : en effet, les données au bord sont les mêmes pour Kerr et Kerr-Debye. Il n'y a donc pas d'incompatibilité qui pourrait créer une couche limite. La preuve de la convergence est basée sur l'utilisation des variables entropiques, qui permettent de symétriser le système pour obtenir des estimations par des méthodes variationnelles.

Bien que le modèle de Kerr-Debye soit quasilinear, les simulations numériques dues à P. Huyn laissent à penser que ce système ne développe pas de chocs. Cette hypothèse est renforcée par le fait que l'équation de Kerr-Debye est linéairement dégénérée. Dans un premier temps, on démontre dans [B5] que le modèle de Kerr-Debye a un comportement semilinear : au temps maximal d'existence de la solution régulière du modèle de Kerr-Debye en dimension 1, il y a forcément explosion de la solution en norme L^∞ . La méthode utilisée permet de construire dans [S2] toute une famille de systèmes quasilinear linéairement dégénérés qui ne développent pas de choc. Pour le système particulier de Kerr-Debye, une mise en évidence de propriétés dissipatives plus fortes permet d'obtenir l'existence globale de solutions régulières en dimension 1.

5.2. Relaxation de Suliciu du p -système

Dans [A16], nous étudions le modèle de Suliciu, qui est une approximation par relaxation du p -système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \partial_x u_2 = 0, \\ \partial_t u_2 - \partial_x p(u_1) = 0. \end{cases}$$

Le modèle de Suliciu, d'abord introduit dans le cas de matériaux viscoélastiques, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u_1^\varepsilon - \partial_x u_2^\varepsilon = 0, \\ \partial_t u_2^\varepsilon - \partial_x v^\varepsilon = 0, \\ \partial_t v^\varepsilon - \mu \partial_x u_2^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (p(u_1^\varepsilon) - v^\varepsilon), \end{cases}$$

Nous l'étudions dans le cas du problème mixte, *i.e.* le problème est posé dans $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+$, avec des données initiales nulles : $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, v^\varepsilon)(0, x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, et avec les conditions au bord suivantes : $u_2^\varepsilon(t, 0) = \varphi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

Dans le cas des solutions régulières, nous montrons la convergence des solutions du modèles de Suliciu vers celles du p -systèmes lorsque ε tend vers zéro. Cette convergence est obtenue sur tout intervalle de temps strictement inclus dans l'intervalle maximal d'existence des solutions régulières du p -système. La preuve est basée sur l'utilisation des variables conservatives dissipatives qui permettent de symétriser le système tout en conservant son caractère semi-linéaire, et tout en linéarisant le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$.

Mes recherches actuelles sont dirigées selon deux axes principaux : modélisation du ferromagnétisme (cf les points 1., 2. et 3. ci après) et modèles de relaxation (cf 4., 5. et 6.).

1. Modèles de fils finis en ferromagnétisme

Dans le cadre du projet ANR SICOMAF (simulation et contrôle des matériaux ferromagnétiques), nous voulons étudier des modèles de nanofils ferromagnétiques de longueur finie. Nous avons déjà obtenu par des techniques de Γ -convergence un modèle de fil fini et montré la stabilité d'états constants pour ce modèle. Contrairement aux fils infinis étudiés dans [A13], nous montrons que les profils de murs sont instables. Nous voulons maintenant étudier la stabilisation des profils de murs ainsi que le passage d'un état constant à l'autre par application d'un champ magnétique extérieur. Cette étude pourrait permettre de mieux comprendre les phénomènes d'hystérésis observés dans les expériences sur les fils.

D'autre part, un autre modèle de fil, obtenu par développement asymptotique à l'ordre 1 de la fonctionnelle du ferromagnétisme, pourra permettre d'étudier les couches limites apparaissant au bord du fil. Ces couches limites, qui sont observées par les expérimentateurs, sont dues à la compétition entre l'énergie démagnétisante qui force l'aimantation à être parallèle au fil dans le fil et orthogonale au fil au bord de celui-ci, avec l'énergie d'échange qui interdit des changements brusques de l'aimantation,

Enfin, nous désirons obtenir des modèles multidimensionnels plus réalistes de paroi (description de parois 2D avec une singularité). Ceci permettrait via une étude de stabilité, de comprendre pourquoi les parois observées sont de différentes natures selon le diamètre du fil.

2. Modèles d'hystérésis en ferromagnétisme

En collaboration avec M. Effendiev et P. Fabrie, nous étudions un modèle d'hystérésis pour les équations de Landau-Lifschitz, faisant apparaître un opérateur maximal monotone. Dans ce modèle, le champ effectif est donné par :

$$H_{eff} = \Delta u + h_d(u) + H_a + \Psi(u) - \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

où β est l'opérateur maximal monotone suivant :

$$\beta(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{|\xi|} & \text{si } \xi \neq 0, \\ B(0, 1) & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Le but de notre travail serait de démontrer l'existence de solutions régulières pour ce modèle, et de comprendre en quoi ce modèle décrit bien les phénomènes d'hystérésis. Nous avons démontré dans [S1] l'existence de solutions régulières pour un modèle relaxé du modèle d'hystérésis initial.

3. Modèle de courant appliqué dans les matériaux ferromagnétiques

Le modèle suivant a été introduit pour comprendre l'évolution de l'aimantation dans un fil ferromagnétique soumis à un courant électrique. On ajoute alors à l'équation de Landau-Lifschitz-Guilbert un terme de transport modélisant l'effet du courant appliqué v :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \wedge \frac{\partial u}{\partial t} = 2u \wedge H_{eff} - (v \cdot \nabla)u$$

Lorsqu'on applique un courant à un fil dont l'aimantation présente un mur, on observe un effet de seuil : lorsque le courant est petit, le mur se déforme mais reste immobile. A partir d'un certain seuil, le mur commence à se déplacer. Il s'agit de modéliser ce phénomène via l'obtention et l'étude d'un modèle 1D équivalent.

J'ai proposé un sujet de thèse répondant à cette problématique.

4. Comportement semi-linéaire des systèmes quasi-linéaires linéairement dégénérés

Un système hyperbolique est dit linéairement dégénéré si pour toute valeur propre $\lambda(u)$ de vecteur propre $\xi(u)$, on a $\nabla\lambda \cdot \xi = 0$. C'est par exemple le cas pour le système de Kerr-Debye. Dans le cadre d'une collaboration avec Roberto Natalini (CNR, Rome) et Bernard Hanouzet, nous voulons montrer qu'un système linéairement dégénéré ne peut pas développer de choc, et donc a un comportement semi-linéaire. Un premier pas a été fait par Hanouzet et Natalini dans le cas riche (lorsque le système est diagonalisable par les invariants de Riemann). D'autre part, l'exemple du système de Kerr-Debye est un argument supplémentaire dans cette direction (voir [B5]). Des avancées sont proposées pour publication dans [S2].

5. Convergence des solutions régulières de Kerr-Debye en dimension 3

Dans un article en préparation [P1], nous améliorons le résultat de convergence en dimension 3 du modèle de Kerr-Debye vers le modèle de Kerr pour les solutions régulières du problème mixte. La convergence est maintenant obtenue sur tout intervalle de temps strictement inclus dans le domaine d'existence de la solution régulière du modèle limite.

6. Existence globale pour les solutions régulières de Kerr-Debye

En collaboration avec B. Hanouzet, nous avons démontré un résultat d'existence globale des solutions du système de Kerr-Debye en dimension 1 et en dimension 2 pour le modèle transverse électrique. En dimension 3, ce problème reste ouvert. S'il existe des résultats d'existence globale à données petites pour le problème de Cauchy sur l'équation de Kerr, aucun résultat n'est disponible pour le modèle de Kerr-Debye. En collaboration avec Denise Aregba, nous proposons un sujet de thèse sur cette thématique. Dans un autre ordre d'idée, le résultat d'existence globale pour les équations de Kerr-Debye en dimension 1 rend pertinente la question suivante : peut-on construire par passage à la limite dans Kerr-Debye des solutions faibles globales de l'équation de Kerr ?