GdR CHANT
Colloque "Transport et Microstructures"

Grenoble, 19-21 janvier 2011

Quasistabilité des configurations de plusieurs murs dans un nanofil ferromagnétique

Gilles Carbou

Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux 1

GdR CHANT

Colloque "Transport et Microstructures"

Grenoble, 19-21 janvier 2011

Quasistabilité des configurations de plusieurs murs dans un nanofil ferromagnétique

1. Modèles de nanofils ferromagnétiques
2. Description des murs
3. Quasi-stabilité

I. Modèles de nanofils ferromagnétiques

A. Modèle 3d

Moment magnétique : $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad |m| = 1$

$$B = H + m$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

- LL préserve la contrainte de saturation $|m| = 1$
- LL tend à aligner m avec H_e

$$H_e = A\Delta m + H_d + H_a.$$

I. Modèles de nanofils ferromagnétiques

A. Modèle 3d

Moment magnétique : $m : \Omega \to I\!R^3, \quad |m| = 1$

$$B = H + m$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

$$H_e = A\Delta m + H_d + H_a.$$

Champ d'échange

$$\mathcal{E}_{exch} = \frac{A}{2} \int_\Omega |\nabla m|^2$$

Condition de Neumann homogène au bord

I. Modèles de nanofils ferromagnétiques

A. Modèle 3d

Moment magnétique : $m : \Omega \to I\!R^3, \quad |m| = 1$

$$B = H + m$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

$$H_e = A\Delta m + H_d + H_a.$$

Champ démagnétisant :

$$\begin{cases} \text{curl } H_d = 0 \text{ dans } I\!R^3, \\ \\ \text{div } (H_d + m) = 0 \text{ dans } I\!R^3 \quad \text{(Loi de Faraday)} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{dem} = \frac{1}{2} \int_{I\!R^3} |H_d|^2$$

A. Modèle 3d

Moment magnétique : $m : \Omega \to I\!R^3, \quad |m| = 1$

$$B = H + m$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

$$H_e = A\Delta m + H_d + H_a.$$

champ appliqué

$$\mathcal{E}_{app} = -\int_\Omega H_a \cdot m$$

A. Modèle 3d

Moment magnétique : $m : \Omega \to I\!R^3, \quad |m| = 1$

$$B = H + m$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

Décroissance de l'énergie: $H_e = -\nabla \mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla m|^2 + \frac{1}{2} \int_{I\!R^3} |H_d|^2 + \int_\Omega \Psi_{anis}(m) - \int_\Omega H_a m$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \int_\Omega |\frac{\partial m}{\partial t}|^2 = 0$$

I. Modèles de nanofils ferromagnétiques

A. Modèle 3d

Références en physique
Landau-Lifschitz (30')
Miltat, Thiaville (LPS, Orsay)

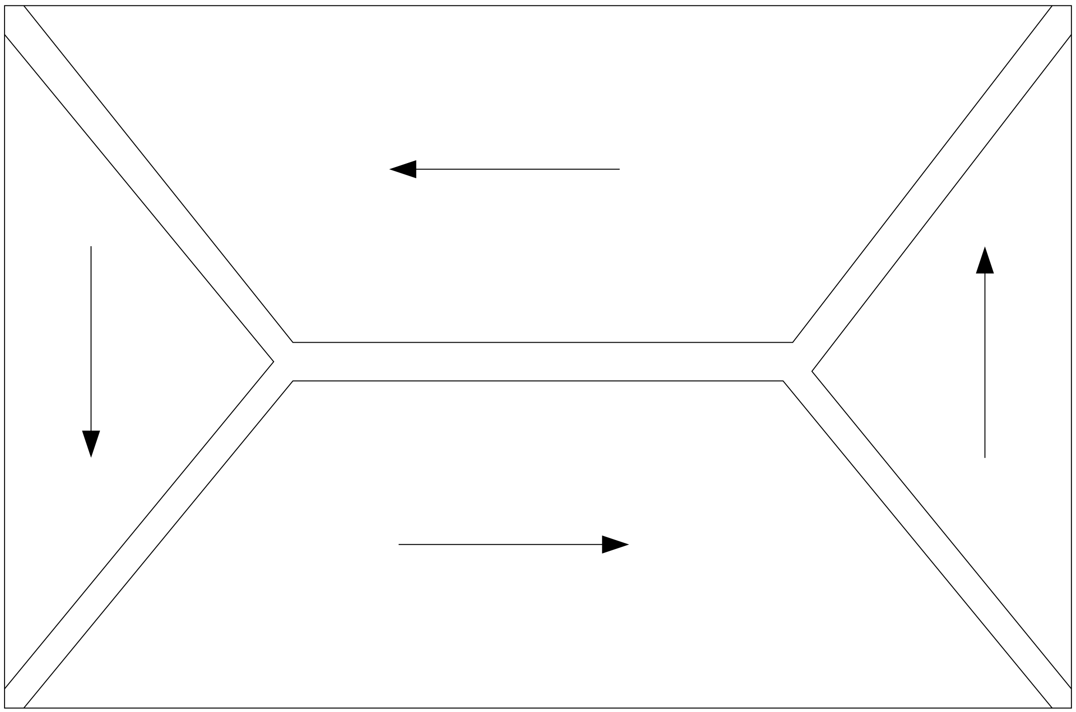
Landau-Lifschitz sans champ d'échange
Existence des solutions : Joly-Métivier-Rauch Ondes : Colin-Galusinsky-Kapper, Sanchez
Simulations numeriques : Joly-Haddad

Landau-Lifschitz avec Champ d'échange
Existence des solutions : Visintin, C.-Fabrie, Ding-Guo
Etudes asymptotiques : C.-Fabrie-Guès, Sanchez
Simulations numériques : Labbé, Garcia-Cervera, Pröhl

I. Modelization

A. Modèle 3d

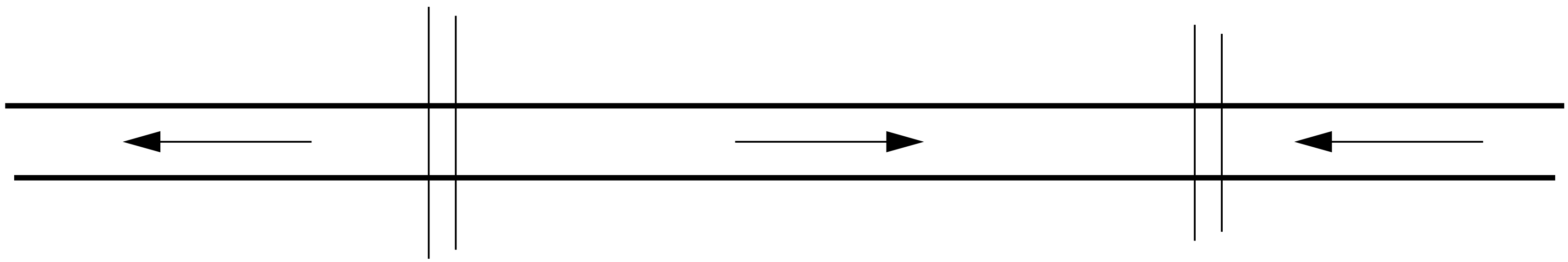
Formation des murs



I. Modelization

A. Modèle 3d

Formation des murs dans des nanofils



I. Modelization

A. Modèle 3d

Formation des murs

Cas statique :

Alouges-Rivière-Serfaty

Alouges-Labbé

De Simone-Kohn-Otto-Müller

I. Modelization

B. Modèle 1d

$$m : \mathbb{R}_t^+ \times [-L, L]_x \longrightarrow S^2$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

$$H_e = H_{ech} + H_{dem} + H_{app}$$

$$H_{ech} = \varepsilon^2 \partial_{xx} m$$

I. Modelization

B. Modèle 1d

$$m : I\!R_t^+ \times [-L, L]_x \longrightarrow S^2$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

$$H_e = H_{ech} + H_{dem} + H_{app}$$

$$\begin{cases} \text{curl } H_d = 0 \text{ dans } I\!R^3, \\ \\ \text{div } (H_d + m) = 0 \text{ dans } I\!R^3 \quad \text{(Loi de Faraday)} \end{cases}$$

I. Modelization

B. Modèle 1d

$$m : \mathbb{R}_t^+ \times [-L, L]_x \longrightarrow S^2$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

$$H_e = H_{ech} + H_{dem} + H_{app}$$

$$H_{dem} = -(m_2 e_2 + m_3 e_3)$$

$$\mathcal{E}_{dem} = \frac{1}{2} \int_{[-L,L]} (|m_2|^2 + |m_3|^2) dx$$

I. Modelization

B. Modèle 1d

$$m : \mathbb{R}_t^+ \times [-L, L]_x \longrightarrow S^2$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e)$$

$$H_e = H_{ech} + H_{dem} + H_{app}$$

$$H_{app} = h(t, x) e_1$$

I. Modelization

B. Modèle 1d

$$m : \mathbb{R}_t^+ \times [-L, L]_x \to S^2$$

Equation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1 + \frac{1}{\varepsilon} h(t,x) e_1$$

$$\partial_x m(-L) = \partial_x m(L) = 0$$

après changement d'échelle en temps

$(m \wedge H_{dem} = m \wedge m_1 e_1)$

II. Description des murs

A. Solutions exactes : fils infinis

$$m : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to S^2$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1 + \frac{1}{\varepsilon} h e_1$$

II. Description des murs

A. Solutions exactes : fils infinis

Un seul mur, champ appliqué nul :

$$m : I\!\!R^+ \times I\!\!R \to S^2$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1$$

$$m(t,x) = M_0(\frac{x}{\varepsilon})$$

$$M_0(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{th} z \\ 1/\operatorname{ch} z \\ 0 \end{pmatrix}$$

II. Description des murs

A. Solutions exactes : fils infinis

Un seul mur, champ appliqué nul :

$$m : I\!R^+ \times I\!R \to S^2$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1$$

$$m(t,x) = R_\theta M_0\left(\frac{x - \sigma}{\varepsilon}\right)$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

II. Description des murs

A. Solutions exactes : fils infinis

Un seul mur, champ appliqué nul :

$$m : I\!R^+ \times I\!R \to S^2$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1$$

Stabilité de cette solution exacte

G. Carbou, S. Labbé, *Stability for static walls in ferromagnetic nanowires*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **6** (2006).

II. Description des murs

A. Solutions exactes : fils infinis

Un seul mur, champ appliqué non nul :

$$m : I\!R^{+} \times I\!R \to S^{2}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1 + h e_1$$

$$m(t,x) = R_{ht/\varepsilon} M_0\left(\frac{x - ht}{\varepsilon}\right)$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

II. Description des murs

A. Solutions exactes : fils infinis

Un seul mur, champ appliqué non nul :

$$m : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to S^2$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1 + h e_1$$

$$m(t,x) = R_{ht/\varepsilon} M_0\left(\frac{x - ht}{\varepsilon}\right)$$

Stabilité de ces solutions sous la condition $|h| < 1$

G. Carbou, S. Labbé, E. Trélat, *Control of travelling walls in a ferromagnetic nanowire*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **1** (2008).

R. Jizzini, *Optimal stability criterion for a wall in ferromagnetic wire submitted to a magnetic field*, à paraître dans J. Differential Equations.

II. Description des murs

A. Solutions exactes : fils infinis

On ne peut pas décrire plusieurs murs positionnés arbitrairement par des solutions exactes

II. Description des murs

B. Solutions exactes : fils finis

$$m : I\!R^+ \times [-L, L] \to S^2$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1$$

Pour un mur : solution exacte centrée en 0

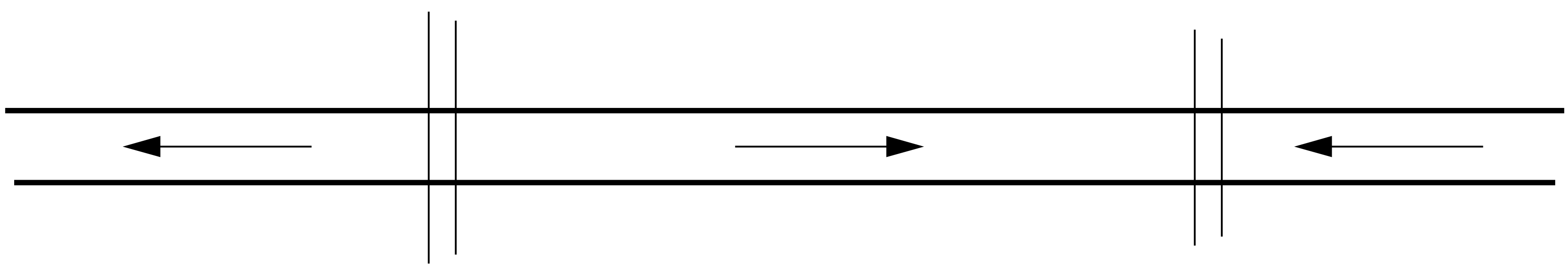
Cette solution est instable

G. Carbou, S. Labbé, *Stabilization of walls for nano-wires of finite lenght*,
à paraître dans COCV

II. Description des murs

B. Solutions exactes : fils finis

Impossible de décrire toutes les configurations réalistes de plusieurs murs par des solutions exactes

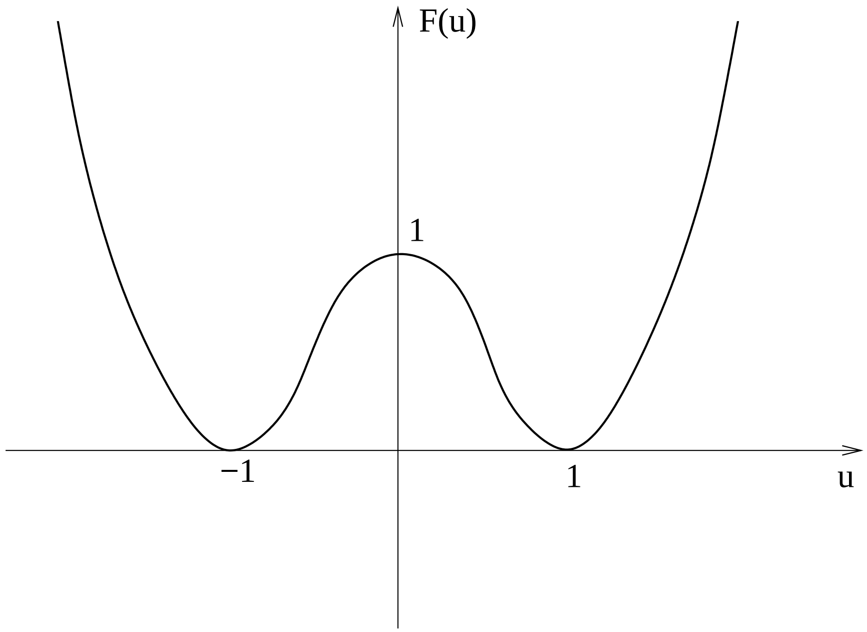


II. Description des murs

C. Le résultat de Carr et Pego

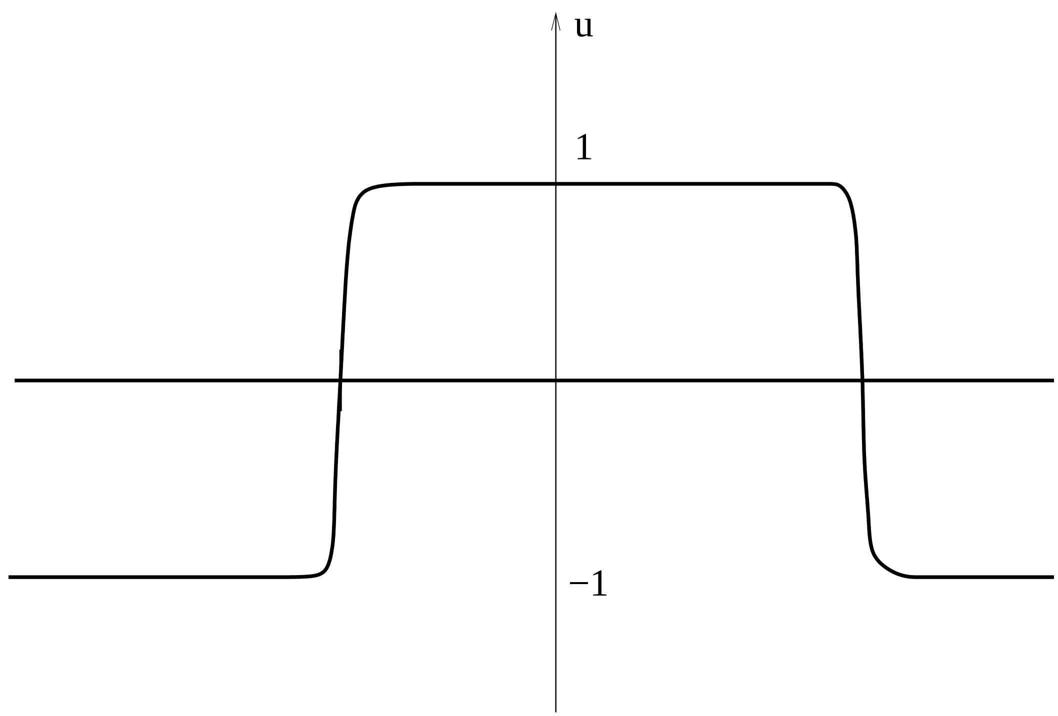
J. Carr, R. L. Pego, *Metastable patterns in solutions of* $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 5, 523–576.

- $u : \mathbb{R}_t \times [0,1] \to \mathbb{R}$
- $f(u) = F'(u)$, F potentiel à deux puits de même profondeur



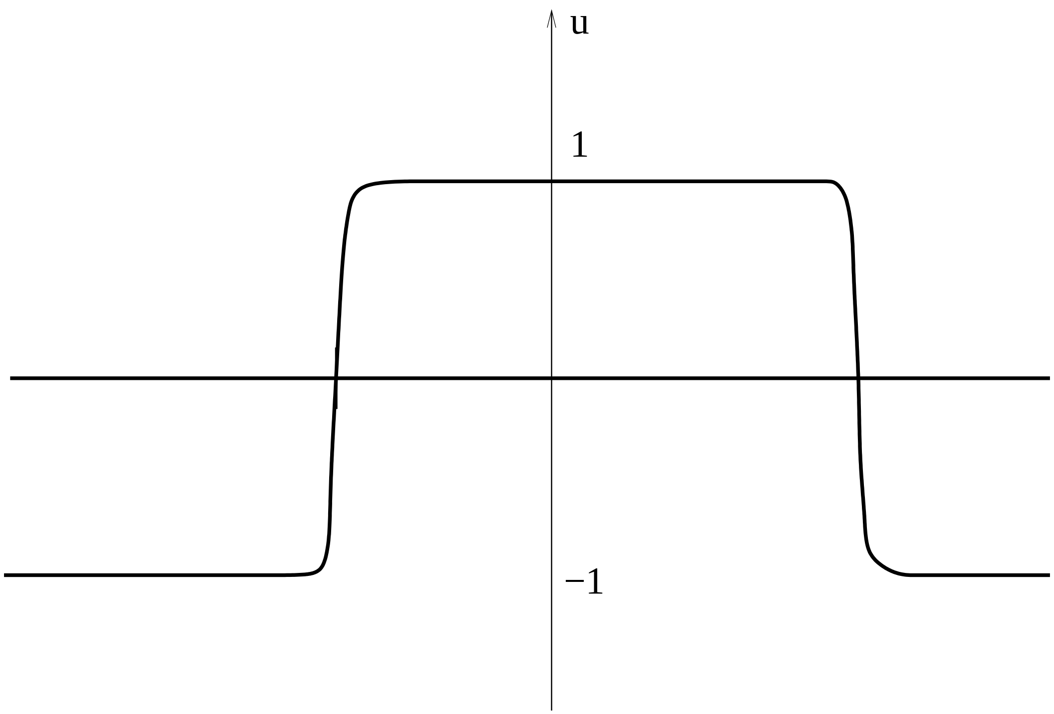
C. Le résultat de Carr et Pego

Constructions de quasi-solutions du type:



C. Le résultat de Carr et Pego

Ces quasi-solutions restent "stables" sur un temps très long $e^{\frac{C}{\varepsilon}}$



C. Le résultat de Carr et Pego

On va utiliser la méthode de Carr et Pégo (issue de méthodes géométriques de Hale et Fusco)

- le problème est vectoriel
- le problème est quasi-linéaire
- on sait faire bouger les murs

D. Solutions approchées

Sans champ appliqué

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h_e - m \wedge (m \wedge h_e)$$

$$h_e = \varepsilon \partial_{xx} m + \frac{1}{\varepsilon} m_1 e_1$$

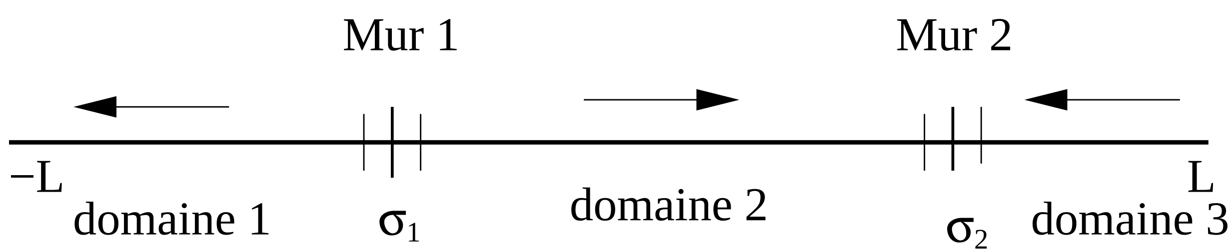
$$\partial_x m(-L) = \partial_x m(L) = 0$$

On fixe $\sigma \in \mathbb{R}^N$ et $\theta \in \mathbb{R}^N$.

D. Solutions approchées

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$, positions des N murs

$$-L \leq \sigma_1 - \delta \leq \sigma_1 + \delta \leq \sigma_2 - \delta \leq \ldots \leq \sigma_N - \delta \leq \sigma_N + \delta \leq L$$



II. Description des murs

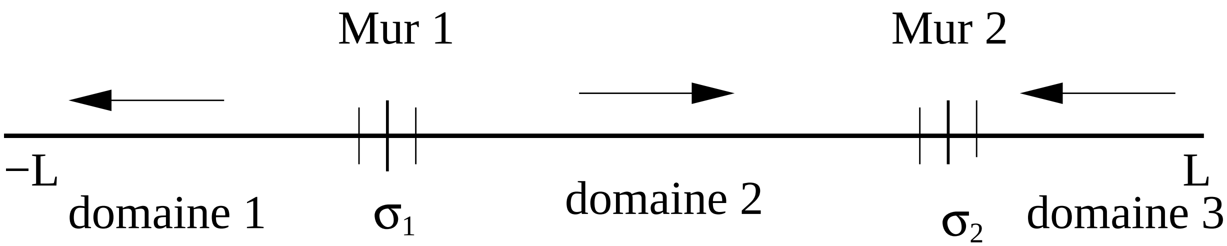
D. Solutions approchées

$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$ dans les domaines

$$-e_1 \qquad \text{dans} \qquad D_1 = [-L, \sigma_1 - \delta]$$

$$(-1)^i e_1 \qquad \text{dans} \qquad D_i = [\sigma_{i-1} + \delta, \sigma_i - \delta]$$

$$(-1)^{N+1} e_1 \qquad \text{dans} \qquad D_{N+1} = [\sigma_N + \delta, L]$$

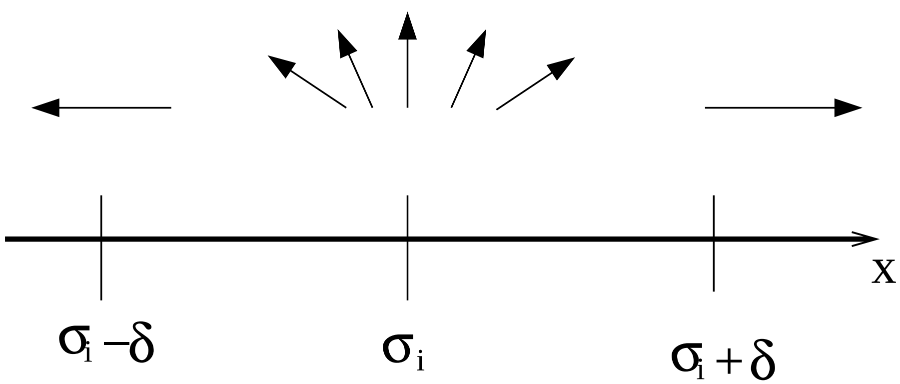


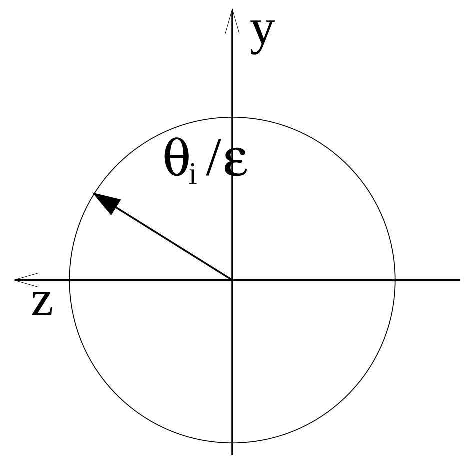
II. Description des murs

D. Solutions approchées

$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$ dans le $i$ème mur $[\sigma_i-\delta,\sigma_i+\delta]$

inclinaisons du mur θ_i/ε





II. Description des murs

D. Solutions approchées

$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$ dans le $i$ème mur $[\sigma_i-\delta,\sigma_i+\delta]$

Zone centrale $[\sigma_i-\delta/2,\sigma_i+\delta/2]$

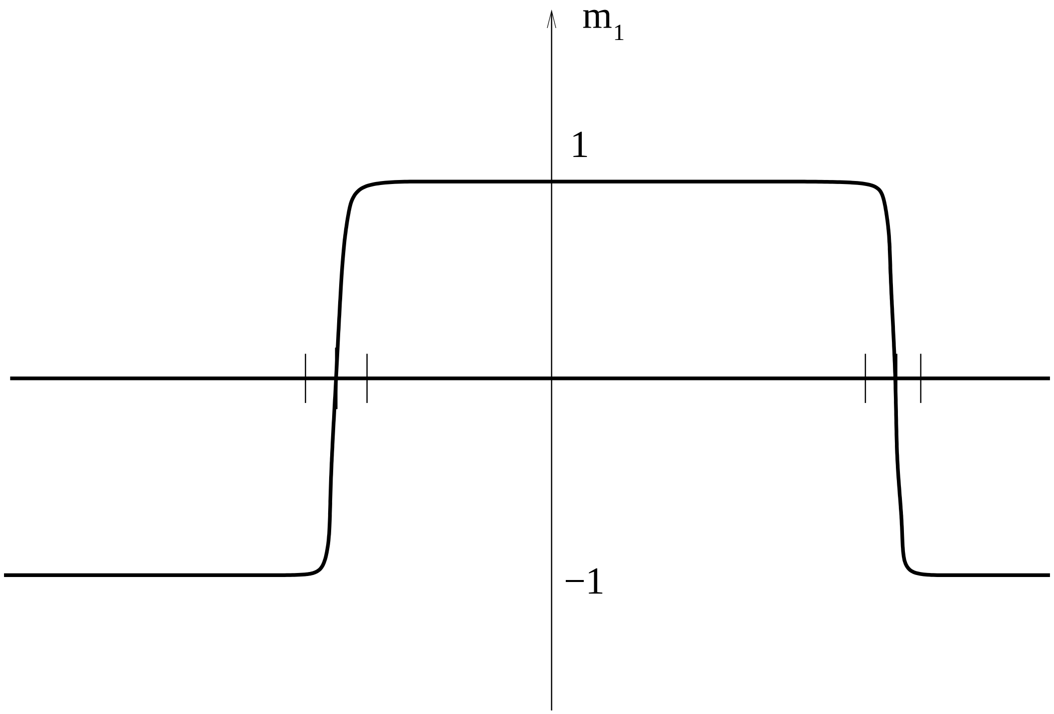
$$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)=R_{\frac{\theta_i}{\varepsilon}}M_0((-1)^{i+1}\frac{x-\sigma_i}{\varepsilon})$$

Raccord régulier dans les zones intermédiaires

D. Solutions approchées

$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$ dans le $i$ème mur $[\sigma_i-\delta,\sigma_i+\delta]$

Première composante de $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$



II. Description des murs

D. Solutions approchées

Pour θ et σ fixé, $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$ est presque solution stationnaire de LL avec $h=0$

$$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)\wedge\left(\varepsilon\partial_{xx}\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)+\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)_1 e_1\right)=\mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$$

E. Enoncé des résultats

sans champ appliqué

θ et σ fixés : si la donnée initiale est proche de $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$, la solution reste proche de $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$ sur un intervale de temps de taille $e^{\frac{\delta}{4\varepsilon}}$

II. Description des murs

E. Enoncé des résultats

avec champ appliqué

Si la donnée initiale est proche de $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta^0, \sigma^0)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_i^{ref}}{dt} = h(t, \sigma_i^{ref}(t)) \\ \\ \dfrac{d\sigma_i^{ref}}{dt} = (-1)^{i+1} h(t, \sigma_i^{ref}(t)) \\ \\ \sigma^{ref}(0) = \sigma^0, \;\; \theta^{ref}(0) = \theta^0 \end{cases}$$

La solution reste proche de $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta^{ref}, \sigma^{ref})$ sur un intervalle de taille $\frac{1}{\varepsilon}$.

Si h est constant dans les murs, La solution reste proche de $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta^{ref}, \sigma^{ref})$ sur un intervalle de taille $e^{\frac{\delta}{4\varepsilon}}$

III. Quasi-stabilité

A. Autour des $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma), \sigma_{i+1} - \sigma_i \geq 2\delta\}$$

famille à $2N$ paramètres de quasi-solutions stationnaires de LL

$$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma) \wedge \left(\varepsilon \partial_{xx} \mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)_1 e_1\right) = \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$$

III. Quasi-stabilité

A. Autour des $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$

On paramétrise un voisinage de $\mathcal{M}$ dans $H^1([-L,L];S^2)$ par

$$m = \mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma) + w + \nu(w)\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$$

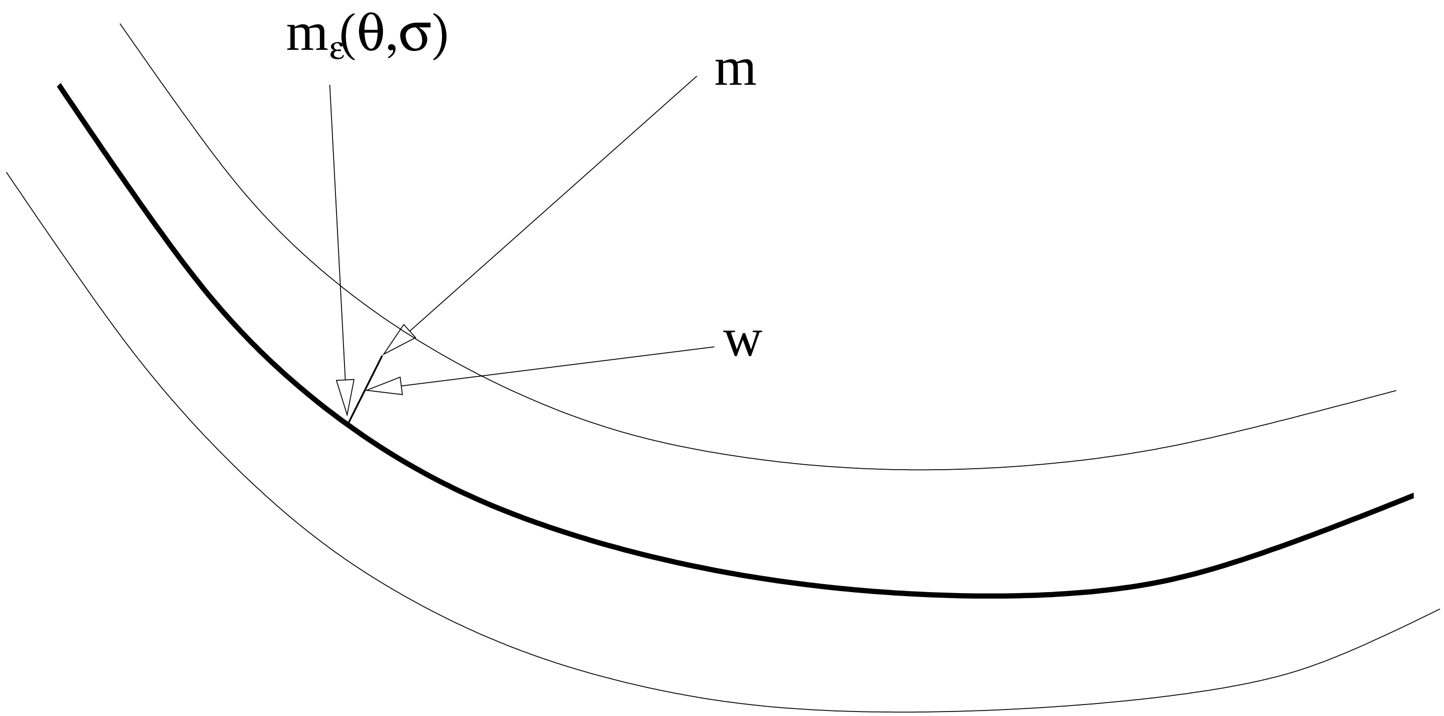
- $w \cdot \mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma) = 0$
- $\nu(\xi) = \sqrt{1-|\xi|^2} - 1$
- $< w|\partial_{\sigma_i}\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma) >= 0$
- $< w|\partial_{\theta_i}\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma) >= 0$

III. Quasi-stabilité

A. Autour des $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$

On paramt́rise un voisinage de $\mathcal{M}$ dans $H^1([-L,L];S^2)$ par

$$m = \mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma) + w + \nu(w)\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)$$



III. Quasi-stabilité

A. Autour des $\mathbf{m}_\varepsilon(\theta, \sigma)$

On paramt́rise un voisinage de $\mathcal{M}$ dans $H^1([-L, L]; S^2)$ par

$$m(t) = \mathbf{m}_\varepsilon(\theta(t), \sigma(t)) + w(t) + \nu(w(t))\mathbf{m}_\varepsilon(\theta(t), \sigma(t))$$

Par théorème d'inversion locale, c'est un bon paramétrage dans un voisinage de $\mathcal{M}$ dont la taille ne dépend pas de ε

III. Quasi-stabilité

B. Equation dans le nouveau paramétrage

On injecte le nouveau paramétrage dans Landau-Lifschitz

$$m(t) = \mathbf{m}_\varepsilon(\theta(t), \sigma(t)) + w(t) + \nu(w(t))\mathbf{m}_\varepsilon(\theta(t), \sigma(t))$$

En projetant sur $\partial_{\theta_i}\mathbf{m}_\varepsilon$ et $\partial_{\sigma_i}\mathbf{m}_\varepsilon$, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_i}{dt} = h(t, \sigma_i) + a_\varepsilon^1 + G_\varepsilon^1(\theta_i, \sigma_i, w)(w) \\ \\ \dfrac{d\sigma_i}{dt} = (-1)^i h(t, \sigma_i) + a_\varepsilon^2 + G_\varepsilon^2(\theta_i, \sigma_i, w)(w) \end{cases}$$

Perturbation de l'edo vérifée par $(\theta^{ref}, \sigma^{ref})$

$$a_\varepsilon^i = \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$$

III. Quasi-stabilité

B. Equation dans le nouveau paramétrage

Par soustraction : équation sur w

$$\partial_t w = a_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon w + P_\varepsilon w + l^\varepsilon w + G^\varepsilon(w, \theta, \sigma)$$

- $a_\varepsilon = \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$
- Λ_ε linéarisé avec $h = 0$
- P_ε linéarisé provenant du champ appliqué
- $l_\varepsilon(w) = \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})(w)$
- G^ε non linéaire en w.

C. Coercivité du linéarisé

Partie indépendante de h

$$\Lambda_\varepsilon w = \mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w) + \mathbf{m}_\varepsilon \wedge (\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)),$$

$$\mathcal{H}^\varepsilon(w) = -\varepsilon \partial_{xx} w - \frac{1}{\varepsilon} w_1 e_1 + f_\varepsilon^\sigma w$$

$$f_\varepsilon^\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ dans les domaines} \\ \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(2\mathrm{th}^2(\dfrac{x-\sigma_i}{\varepsilon}) - 1) \text{ dans les murs} \end{cases}$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Partie induite par h

$$P_\varepsilon w = -\frac{h}{\varepsilon} w \wedge e_1 - \frac{h}{\varepsilon} w_1 \mathbf{m}_\varepsilon - \frac{h}{\varepsilon} \mathbf{m}_\varepsilon(\theta, \sigma)_1 w$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Estimation en multipliant par $\mathcal{H}^\varepsilon(w)$

$$\partial_t w = \mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w) + \mathbf{m}_\varepsilon \wedge (\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)) + ...$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} < w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) > + \|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|^2 = \dots$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un domaine :

$$\mathcal{H}^\varepsilon(w) = -\varepsilon \partial_{xx} w - \frac{1}{\varepsilon} w_1 e_1 + f_\varepsilon^\sigma w$$

$$w_1 = 0 \quad \text{et } f_\varepsilon^\sigma = \frac{1}{\varepsilon}$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un domaine :

$$\mathcal{H}^\varepsilon(w) = -\varepsilon\partial_{xx}w + \frac{1}{\varepsilon}w$$

$$< w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) >= \varepsilon \int |\partial_x w|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int |w|^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}\|w\|_{L^2}$$

$< w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) >$ contrôle la norme L^∞

$$\|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} < w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) >\geq \frac{1}{\varepsilon^2}\|w\|_{L^2}^2$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un domaine :

$$P_\varepsilon w = -\frac{h}{\varepsilon} w \wedge e_1 - \frac{h}{\varepsilon} w_1 \mathbf{m}_\varepsilon - \frac{h}{\varepsilon} \mathbf{m}_\varepsilon(\theta, \sigma)_1 w$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un domaine :

$$P_\varepsilon w = -\frac{h}{\varepsilon} w \wedge e_1 + \frac{h}{\varepsilon}(-1)^i w$$

$$< w \wedge e_1 | \mathcal{H}^\varepsilon w >= \int w \wedge e_1 \cdot (-\varepsilon \partial_{xx} w + \frac{1}{\varepsilon} w) = 0$$

$$| < P_\varepsilon w | \mathcal{H}^\varepsilon w > | \leq \frac{|h|}{\varepsilon} \|w\|_{L^2} \|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon w\|_{L^2} \leq |h| \|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon (w)\|_{L^2}^2$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un domaine :

$$\partial_t w = \mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w) + \mathbf{m}_\varepsilon \wedge (\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)) + P_\varepsilon w + \text{ non linéaire}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} < w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) > +(1 - \|h\|_{L^\infty})\|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|^2 \leq \text{ non linéaire} \cdot \mathcal{H}^\varepsilon(w)$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un mur :

$$\mathbf{m}_\varepsilon(\theta,\sigma)(x) = R_{\frac{\theta_i}{\varepsilon}} M_0\left((-1)^{i+1}\frac{x-\sigma_i}{\varepsilon}\right) := R_{\frac{\theta_i}{\varepsilon}} M_0(z)$$

$$w(x) = R_{\frac{\theta_i}{\varepsilon}} \left(r_1(z)M_1(z) + r_2(z)M_2\right)$$

$$M_0(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{th} z \\ 1/\operatorname{ch} z \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_1(z) = \begin{pmatrix} -1/\operatorname{ch} z \\ \operatorname{th} z \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w \cdot \mathbf{m}_\varepsilon = 0$$

$$< w|\partial_{\sigma_i}\mathbf{m}_\varepsilon >= 0 \iff \int r_1 \frac{1}{\operatorname{ch} z} = 0$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un mur :

$$< \mathcal{H}^\varepsilon(w)|w > = < \mathcal{H}(r)|r >$$

$$\mathcal{H}(r) = -\partial_{zz} r + (2\mathrm{th}^2 z - 1) r$$

- $\mathcal{H}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\, x}\right) = 0$
- Ess Spec $\mathcal{H} = [1, +\infty[$, $\mathcal{H} = l^* \circ l \geq 0$, où $l = \partial_x + \mathrm{th}\, x$
- $\mathcal{H}$ n'a pas d'autres valeurs propres car $l \circ l^* = -\partial_{xx} + 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(v) = \lambda v \Rightarrow & \quad l \circ l^* \circ l v = \lambda l v \\ \Rightarrow & \quad (-\partial_{xx} + 1) l v = \lambda l v \end{aligned}$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un mur :

$$< \mathcal{H}^\varepsilon(w)|w > = < \mathcal{H}(r)|r >$$

$$\mathcal{H}(r) = -\partial_{zz} r + (2\mathrm{th}^2 z - 1) r$$

$$< \mathcal{H}(r)|r > \geq \|r\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\varepsilon}\|w\|_{L^2}^2$$

$< w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) >$ contrôle la norme L^∞

$$\|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} < w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) > \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\|w\|_{L^2}^2$$

$$< \mathcal{H}^\varepsilon(w)|w > \geq \frac{1}{\varepsilon}\|w\|_{L^2}^2$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un mur :

$P_\varepsilon \sim h\, l(r)$ après changement d'échelle

$$| < l(r) | \mathcal{H}(r) > | \leq \| \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(r) \|_{L^2} \| \mathcal{H}(r) \|_{L^2} \leq \| \mathcal{H}(r) \|_{L^2}^2$$

$$< P_\varepsilon w | \mathcal{H}^\varepsilon(w) > \leq \frac{\|h\|_{L^\infty}}{\varepsilon} \| \mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w) \|_{L^2}^2$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Dans un mur :

$$\partial_t w = \mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w) + \mathbf{m}_\varepsilon \wedge (\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)) + P_\varepsilon w + \text{ non linéaire}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} < w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) > +(1 - \|h\|_{L^\infty})\|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|^2 \leq \text{ non linéaire} \cdot \mathcal{H}^\varepsilon(w)$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Comment raccorder ?

Système adapté de fonctions cut-off (IMS formula)

- $\chi_i \in \mathcal{C}^\infty$
- supp $\chi_0 \in [-L, L] \setminus \bigcup_{i=1}^N [\sigma_i - \delta/2, \sigma_i + \delta/2]$
- supp $\chi_i \subset [\sigma_i - 2\delta/3, \sigma_i + 2\delta/3]$ pour $i \neq 0$
- $\sum_{i=0}^N (\chi_i)^2 = 1$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Comment raccorder ?

$$< \mathcal{H}^\varepsilon(w)|w >= \sum_{j=0}^{N} < \mathcal{H}^\varepsilon(w)|(\chi_j)^2 w >$$

$$< f w|(\chi_j)^2 w >=< f\,\chi_j w|\chi_j w >$$

C. Coercivité du linéarisé

Comment raccorder ?

$$
\begin{aligned}
- < \partial_{xx} w | (\chi_j)^2 w > = & < \partial_x w | \partial_x (\chi_j \chi_j w) > \\
= & < \chi_j \partial_x w | \partial_x (\chi_j w) > + < \partial_x w | \partial_x \chi_j \chi_j w > \\
= & < \partial_x (\chi_j w) | \partial_x (\chi_j w) > - < \partial_x \chi_j \partial_x w | \partial_x (\chi_j w) > \\
& + \frac{1}{2} < \partial_x w | \partial_x (\chi_j^2) w > \\
= & < \partial_x (\chi_j w) | \partial_x (\chi_j w) > - \frac{1}{2} < \partial_x (\chi_j^2) \partial_x w | \partial_x w > \\
& - < \partial_x \chi_j \partial_x w | \partial_x \chi_j w > + \frac{1}{2} < \partial_x w | \partial_x (\chi_j^2) w >
\end{aligned}
$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Comment raccorder ?

$$\sum_{j=0}^{N} \partial_x(\chi_j^2) = \partial_x \sum_{j=0}^{N} (\chi_j^2) = 0,$$

$$-\sum_{j=0}^{N} < \partial_{xx} w | (\chi_j)^2 w > = \sum_{j=0}^{N} < \partial_x(\chi_j w) | \partial_x(\chi_j w) > - \sum_{j=0}^{N} < \partial_x \chi_j \partial_x w | \partial_x \chi_j w > .$$

$$< \mathcal{H}^\varepsilon(w) | w > = \sum_{j=0}^{N} < \mathcal{H}^\varepsilon(\chi_j w) | \chi_j w > - \varepsilon \sum_{j=0}^{N} < \partial_x \chi_j \partial_x w | \partial_x \chi_j w >$$

$$\left| \varepsilon \sum_{j=0}^{N} < \partial_x \chi_j \partial_x w | \partial_x \chi_j w > \right| \leq K \varepsilon \|w\|_{L^2} \|\partial_x w\|_{L^2} \leq K \, |< \mathcal{H}^\varepsilon(w) | w >|$$

III. Quasi-stabilité

C. Coercivité du linéarisé

Comment raccorder ?

$< w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) >$ contrôle la norme L^∞

$$\|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|_{L^2}^2 \geq \frac{1-\gamma}{\varepsilon} < w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) > \geq \frac{1-\gamma}{\varepsilon^2}\|w\|_{L^2}^2$$

$$< \mathcal{H}^\varepsilon(w)|w > \geq \frac{1-\gamma}{\varepsilon}\|w\|_{L^2}^2$$

Si $\|h\|_{L^\infty} < 1-\tau$, le terme $\mathcal{H}^\varepsilon$ absorbe la perturbation due à h.

III. Quasi-stabilité

D. Estimation

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} < w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) > +(1 - \|h\|_{L^\infty})\|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|^2 \leq \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$$

$$+K\sqrt{< w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) >}\|\mathbf{m}_\varepsilon \wedge \mathcal{H}^\varepsilon(w)\|^2$$

Hypothèse : $\|h\|_{L^\infty} \leq 1 - \tau$
$G(t) =< w|\mathcal{H}^\varepsilon(w) >$

$$G' + (\tau - K\sqrt{G})\frac{G}{\varepsilon} \leq \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$$

Tant que $\sqrt{G} \leq \frac{\tau}{2K}$,

$$G' + \frac{\tau}{2\varepsilon}G \leq \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$$

D. Estimation

Tant que $\sqrt{G} \leq \frac{\tau}{2K}$,

$$G' + \frac{\tau}{2\varepsilon} G \leq \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}})$$

$$G(t) \leq \frac{2\varepsilon}{\tau} \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}}) + [G(0) - \frac{2\varepsilon}{\tau}] e^{-\frac{2\tau}{\varepsilon} t}$$

$G(t)$ reste petit en tout temps

III. Quasi-stabilité

D. Estimation

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\theta_i}{dt} = h(t,\sigma_i) + a^1_\varepsilon + G^1_\varepsilon(\theta_i,\sigma_i,w)(w) \\ \\ \dfrac{d\sigma_i}{dt} = (-1)^i h(t,\sigma_i) + a^2_\varepsilon + G^2_\varepsilon(\theta_i,\sigma_i,w)(w) \end{array}\right.$$

III. Quasi-stabilité

D. Estimation

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_i}{dt} = h(t,\sigma_i) + \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}}) + G(0)e^{-\frac{2\tau}{\varepsilon}t} \\[2ex] \dfrac{d\sigma_i}{dt} = (-1)^i h(t,\sigma_i) + \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}}) + G(0)e^{-\frac{2\tau}{\varepsilon}t} \end{cases}$$

III. Quasi-stabilité

D. Estimation

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_i}{dt} = h(t,\sigma_i) + \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}}) + G(0)e^{-\frac{2\tau}{\varepsilon}t} \\[2em] \dfrac{d\sigma_i}{dt} = (-1)^i h(t,\sigma_i) + \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}}) + G(0)e^{-\frac{2\tau}{\varepsilon}t} \end{cases}$$

III. Quasi-stabilité

D. Estimation

$$\left|\frac{d}{dt}(\sigma_i - \sigma_i^{ref})\right| \leq \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{4\varepsilon}}) + G(0)e^{-\frac{2\tau}{\varepsilon}t}$$

$\sigma_i(t) - \sigma_i^{ref}(t)$ reste petit sur un temps en $Ke^{\frac{\varepsilon}{4\delta}}$

Conclusion

La structure de murs est très stable

Champ appliqué non constant dans les murs : erreur d'ordre ε

$$\Rightarrow \text{temps de validité en } \frac{1}{\varepsilon}$$

Problème : meilleure approximation des profils de murs soumis à un champ non constant ?

Conclusion

Interaction entre deux murs ?

Sortie du fil pour un mur ?

validité du modèle 1d ?