Etude asymptotique des méthodes de pénalisation

Gilles Carbou et Pierre Fabrie

Institut de Mathématiques de Bordeaux
CNRS UMR 5251
Université Bordeaux 1

Etude asymptotique des méthodes de pénalisation

I. Introduction

Calcul du flot autour d'un obstacle fixe : Méthode de pénalisation

II. Couches limites

A. Exemples 1-d

B. Méthodes BKW

C. Cas de la pénalisation

III. Couches minces de matériau poreux

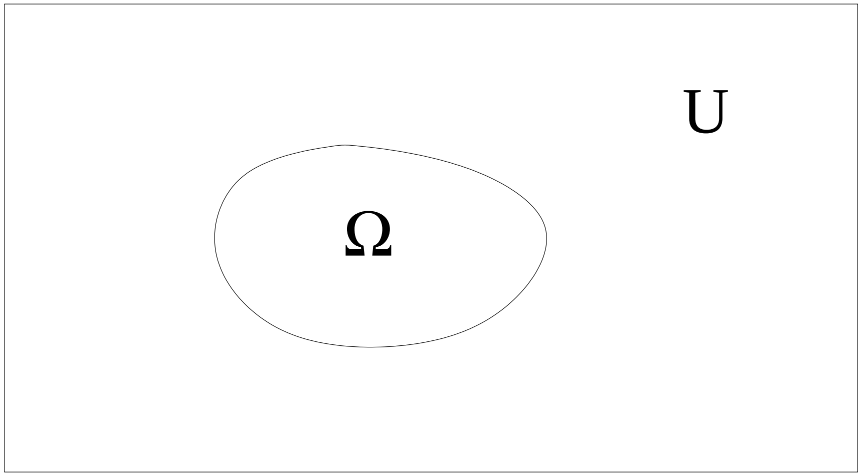
A. Motivation

B. Développement asymptotique pour les couches minces

C. Méthode numérique par pénalisation

I. Introduction

Flot d'un fluide visqueux autour d'un obstacle fixe



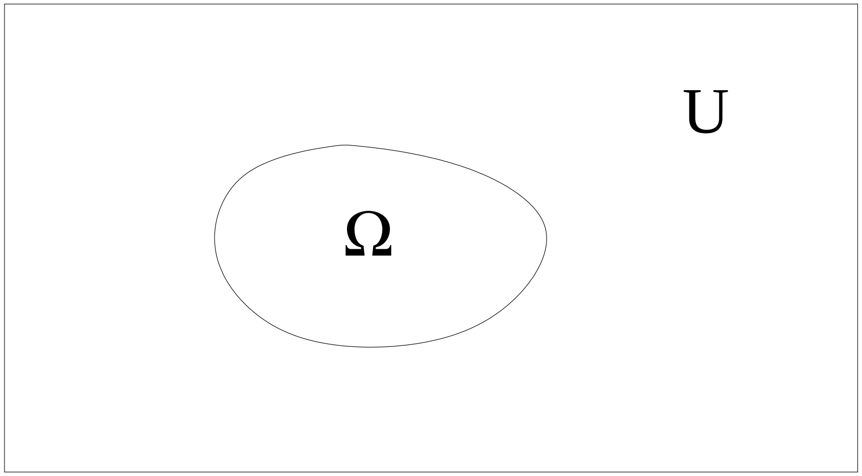
domaine fluide : $\mathcal{U}$

obstacle solide : Ω

$\mathcal{O} = \mathcal{U} \cup \overline{\Omega}$.

I. Introduction

Flot d'un fluide visqueux autour d'un obstacle fixe



$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \text{ dans } \mathcal{U},$$

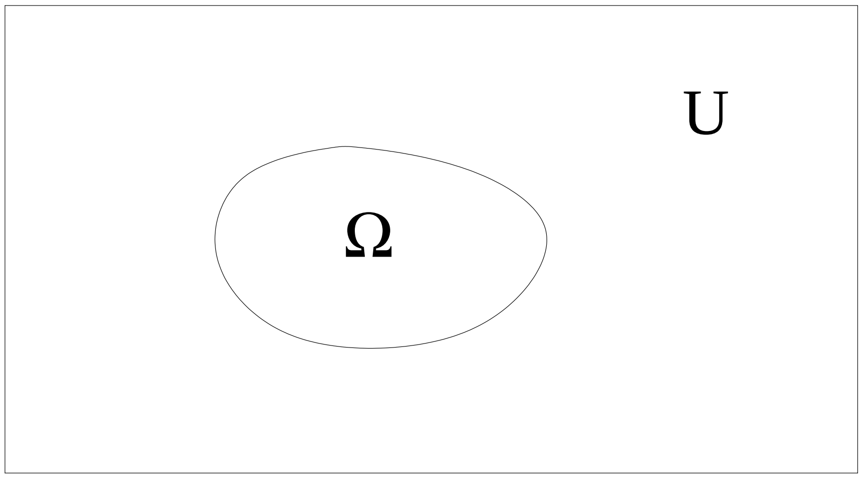
$$\text{div } u = 0 \text{ dans } \mathcal{U},$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O},$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

I. Introduction

Flot d'un fluide visqueux autour d'un obstacle fixe : **pénalisation**



$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\chi_\Omega u^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{O},$$

$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans $\mathcal{O}$,

$u^\varepsilon = 0$ sur $\partial\mathcal{O}$.

I. Introduction

Maillages réguliers : Angot, Arquis, Bruneau, Caltagirone, Fabrie, Mortazavi, Khadra, Parneix,...

Méthodes spectrales : Kevlavian, Ghidaglia,...

I. Introduction

Maillages réguliers : Angot, Arquis, Bruneau, Caltagirone, Fabrie, Mortazavi, Khadra, Parneix,...

Méthodes spectrales : Kevlavian, Ghidaglia,...

Ph. Angot, C.-H. Bruneau, P. Fabrie, *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, Numer. Math., 81 (1999), 497-520.

Erreur en $\sqrt{\varepsilon}$ mais les simulations numériques semblent montrer qu'il y a mieux !

I. Introduction

On va montrer que l'erreur est d'ordre ε en décrivant la couche limite qui se forme dans l'obstacle quand ε tend vers 0

II. Couches limites

A. Exemple en 1-d

$$\begin{cases} (1) \qquad -\varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (2) \qquad u_\varepsilon(0) = 1,\ u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

Equation limite : $u_0 = 0$

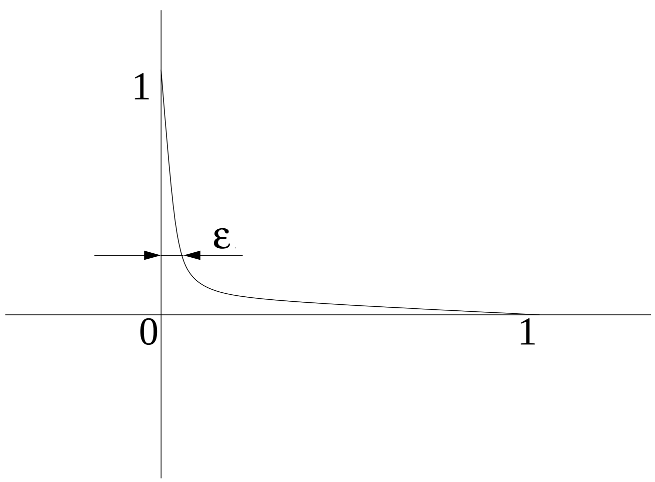
II. Couches limites

A. Exemple en 1-d

$$\begin{cases} (1) \qquad -\varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (2) \qquad u_\varepsilon(0) = 1,\ u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

Equation limite : $u_0 = 0$

Incompatibilité de l'équation limite avec la donnée de Dirichlet



II. Couches limites

A. Exemple en 1-d

$$\begin{cases} (1) \qquad -\varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (2) \qquad u_\varepsilon(0) = 1,\ u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

Equation limite : $u_0 = 0$

Incompatibilité de l'équation limite avec la donnée de Dirichlet

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + r_\varepsilon(x)$$

II. Couches limites

A. Exemple en 1-d

$$\begin{cases} (1) \qquad -\varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (2) \qquad u_\varepsilon'(0) = 1,\ u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

Equation limite : $u_0 = 0$

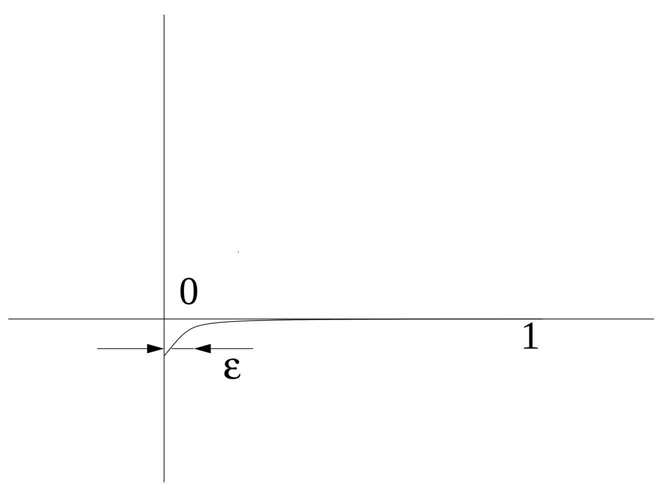
II. Couches limites

A. Exemple en 1-d

$$\begin{cases} (1) \qquad -\varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (2) \qquad u_\varepsilon'(0) = 1,\ u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

Equation limite : $u_0 = 0$

Incompatibilité de l'équation limite avec la donnée de Neumann



II. Couches limites

A. Exemple en 1-d

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & -\varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (2) & u_\varepsilon'(0) = 1, \; u_\varepsilon(1) = 0. \end{array} \right.$$

Equation limite : $u_0 = 0$

Incompatibilité de l'équation limite avec la donnée de Neumann

$$u_\varepsilon(x) = -\varepsilon e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + r_\varepsilon(x)$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Equation limite : $u^0 = f$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Equation limite : $u^0 = f$

Incompatibilité de l'équation limite avec la donnée au bord

$$\Longrightarrow$$

Couche limite au bord décrite par une méthode BKW

cf. Grenier, Guès, C. , Fabrie,...

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Ansatz : $u^\varepsilon(t,x) = U^0(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon U^1(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots$

- $\varphi(x) =$dist$(x, \partial\Omega)$
- $U^i(x,z) = \overline{U^i}(x) + \widetilde{U^i}(x,z)$, avec $\widetilde{U^i}(x,z) \to 0$ quand z tend vers $+\infty$.

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Etape formelle. On injecte ce développement dans les équations, on identifie formellement les puissances de ε : permet de caractériser les profils.

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$u^\varepsilon = U^0(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon U^1(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots$

$$\Delta(x \mapsto U(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon})) = \frac{1}{\varepsilon^2}|\nabla\varphi|^2 U_{zz} + \frac{1}{\varepsilon}\left(2\nabla\varphi \cdot \nabla U_z + \Delta\varphi U_z\right) + \Delta U$$

Ordre ε^0

$$-U^0_{zz} + U^0 = f$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ordre ε^0 : $-U^0_{zz} + U^0 = f$

$z \to +\infty$: $U_0(x,z) = \overline{U_0}(x) + \widetilde{U_0}(x,z)$ avec $\widetilde{U^0} \to 0$ et $U^0_{zz} \to 0.$

$$\overline{U^0}(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ordre ε^0 : $-U^0_{zz} + U^0 = f$

$z \to +\infty$: $\overline{U^0} = f$

Par soustraction :

$$-\widetilde{U^0_{zz}} + \widetilde{U^0} = 0$$

$$\widetilde{U^0}(x,z) = A(x)e^{-z}$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ordre ε^0 : $-U^0_{zz} + U^0 = f$

$z \to +\infty$: $\overline{U^0} = f$

$\widetilde{U^0}(x,z) = A(x)e^{-z}$

Ordre ε^0 au bord : $U^0(x,0) = 0$

$$A(x) = -f(x) \text{ pour } x \in \partial\Omega$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ordre ε^0 : $-U^0_{zz} + U^0 = f$

$z \longrightarrow +\infty$: $\overline{U^0} = f$

$\widetilde{U^0}(x, z) = A(x)e^{-z}$

Ordre ε^0 au bord : $U^0(x, 0) = 0$

$$A(x) = -f(x) \text{ pour } x \in \Omega$$

On fait baver cette condition dans Ω

II. Couches limites

B. Méthode BKW

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On a caractérisé l'ordre zéro :

$$\overline{U^0}(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega$$

$$\widetilde{U^0}(x,z) = -f(x)e^{-z} \text{ pour } x \in \Omega \text{ et } z \in I\!R^+$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

On justifie le développement asymptotique en estimant le reste

$$u^\varepsilon(x) = \overline{U^0}(x) + \Theta(x)\widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + r^\varepsilon(x)$$

Equation du reste :

$$-\varepsilon^2 \left(\Delta\overline{U^0} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Theta\widetilde{U^0_{zz}} + \Theta\frac{1}{\varepsilon}\left(2\nabla\varphi \cdot \nabla U^0_z + \Delta\varphi U^0_z\right) + \Theta\Delta\widetilde{U^0} \right) + ...$$

$$-\varepsilon^2 \left(\nabla\Theta \cdot \nabla(x \mapsto \widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi}{\varepsilon})) + \Delta\Theta\widetilde{U_0} + \Delta r^\varepsilon \right) + \overline{U^0} + \Theta\widetilde{U^0} + r^\varepsilon = f$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

On justifie le développement asymptotique en estimant le reste

$$u^\varepsilon(x) = \overline{U^0}(x) + \Theta(x)\widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + r^\varepsilon(x)$$

Equation du reste :

$$-\varepsilon^2 \left(\Delta\overline{U^0} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Theta\widetilde{U^0_{zz}} + \Theta\frac{1}{\varepsilon}\left(2\nabla\varphi\cdot\nabla U^0_z + \Delta\varphi U^0_z\right) + \Theta\Delta\widetilde{U^0} \right) + \ldots$$

$$-\varepsilon^2 \left(\nabla\Theta\cdot\nabla(x \mapsto \widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi}{\varepsilon})) + \Delta\Theta\widetilde{U_0} + \Delta r^\varepsilon \right) + \overline{U^0} + \Theta\widetilde{U^0} + r^\varepsilon = f$$

$$-\varepsilon^2\Delta r^\varepsilon + r^\varepsilon = \ldots$$

II. Couches limites
B. Méthode BKW

On justifie le développement asymptotique en estimant le reste

$$u^\varepsilon(x) = \overline{U^0}(x) + \Theta(x)\widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + r^\varepsilon(x)$$

Equation du reste :

$$-\varepsilon^2 \left(\Delta\overline{U^0} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Theta\widetilde{U^0_{zz}} + \Theta\frac{1}{\varepsilon}\left(2\nabla\varphi \cdot \nabla U^0_z + \Delta\varphi U^0_z\right) + \Theta\Delta\widetilde{U^0} \right) + ...$$

$$-\varepsilon^2 \left(\nabla\Theta \cdot \nabla(x \mapsto \widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi}{\varepsilon})) + \Delta\Theta\widetilde{U_0} + \Delta r^\varepsilon \right) + \overline{U^0} + \Theta\widetilde{U^0} + r^\varepsilon = f$$

$$-\varepsilon^2\Delta r^\varepsilon + r^\varepsilon = ...$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

On justifie le développement asymptotique en estimant le reste

$$u^\varepsilon(x) = \overline{U^0}(x) + \Theta(x)\widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + r^\varepsilon(x)$$

Equation du reste :

$$-\varepsilon^2\left(\Delta\overline{U^0} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Theta\widetilde{U^0_{zz}} + \Theta\frac{1}{\varepsilon}\left(2\nabla\varphi\cdot\nabla U^0_z + \Delta\varphi U^0_z\right) + \Theta\Delta\widetilde{U^0}\right) + \dots$$

$$-\varepsilon^2\left(\nabla\Theta\cdot\nabla(x \mapsto \widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi}{\varepsilon})) + \Delta\Theta\widetilde{U_0} + \Delta r^\varepsilon\right) + \overline{U^0} + \Theta\widetilde{U^0} + r^\varepsilon = f$$

$$-\varepsilon^2\Delta r^\varepsilon + r^\varepsilon = \varepsilon \times \text{fonction des profils} + \dots$$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

On justifie le développement asymptotique en estimant le reste

$$u^\varepsilon(x) = \overline{U^0}(x) + \Theta(x)\widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + r^\varepsilon(x)$$

Equation du reste :

$$-\varepsilon^2 \left(\Delta\overline{U^0} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Theta\widetilde{U^0_{zz}} + \Theta\frac{1}{\varepsilon}\left(2\nabla\varphi\cdot\nabla U^0_z + \Delta\varphi U^0_z\right) + \Theta\Delta\widetilde{U^0} \right) + \ldots$$

$$-\varepsilon^2 \left(\nabla\Theta\cdot\nabla(x \mapsto \widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi}{\varepsilon})) + \Delta\Theta\widetilde{U_0} + \Delta r^\varepsilon \right) + \overline{U^0} + \Theta\widetilde{U^0} + r^\varepsilon = f$$

$-\varepsilon^2\Delta r^\varepsilon + r^\varepsilon = \varepsilon \times$ fonction des profils $+$ dérivées de $\Theta \times$ fonction de $\widetilde{U^0}$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

On justifie le développement asymptotique en estimant le reste

$$u^\varepsilon(x) = \overline{U^0}(x) + \Theta(x)\widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + r^\varepsilon(x)$$

Equation du reste :

$-\varepsilon^2 \Delta r^\varepsilon + r^\varepsilon = \varepsilon \times$ fonction des profils $+$ dérivées de $\Theta \times$ fonction de $\widetilde{U^0}$

Au bord : $r^\varepsilon = 0$

II. Couches limites

B. Méthode BKW

On justifie le développement asymptotique en estimant le reste

$$u^\varepsilon(x) = \overline{U^0}(x) + \Theta(x)\widetilde{U^0}(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + r^\varepsilon(x)$$

Equation du reste :

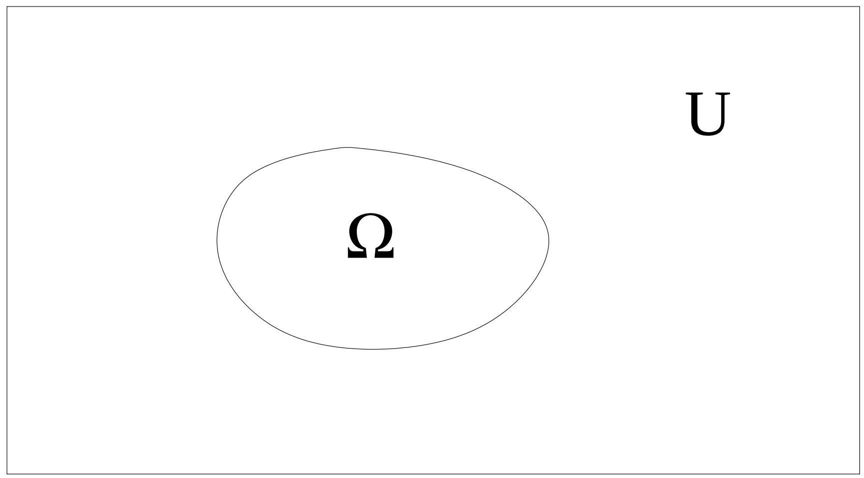
$-\varepsilon^2 \Delta r^\varepsilon + r^\varepsilon = \varepsilon \times \text{fonction des profils} + \text{dérivées de } \Theta \times \text{fonction de } \widetilde{U^0}$

Au bord : $r^\varepsilon = 0$

Par estimation standard : $r^\varepsilon \to 0$ en norme $L^2(\Omega)$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation



$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \chi_\Omega u^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$\text{div } u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{O},$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}.$$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \qquad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \nabla q^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} v^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

$$\text{div } u^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\text{div } v^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

$$u^\varepsilon = v^\varepsilon \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

$$-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + p^\varepsilon n = -\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} + q^\varepsilon n \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

$$u^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Problème limite : $v^0 = 0$, donc $u^0 = 0$ au bord : u^0 solution de Navier Stokes dans $\mathcal{U}$.

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Problème limite : $v^0 = 0$, donc $u^0 = 0$ au bord : u^0 solution de Navier Stokes dans $\mathcal{U}$.
La pression restant continue :

Problème avec la condition de transmission sur Neumann

$$\Longrightarrow$$

Couche limite au bord dans l'obstacle

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

On décrit la couche limite par la méthode BKW :

$$u^\varepsilon(t,x) = U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \dots$$

$$v^\varepsilon(t,x) = V^0(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon V^1(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots$$

- $\varphi(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$
- $V^i(t,x,z) = \overline{V^i}(t,x) + \widetilde{V^i}(t,x,z)$, avec $\widetilde{V^i}(t,x,z) \to 0$ quand z tend vers $+\infty$.

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Ordre ε^{-2} dans Ω :

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \nabla q^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} v^\varepsilon = 0$$

$$-V^0_{zz} + V^0 = 0$$

$z \longrightarrow +\infty$: $\overline{V^0} = 0$

$-\widetilde{V^0_{zz}} + \widetilde{V^0} = 0$: $\widetilde{V^0}(t,x,z) = \gamma^0(t,x) e^{-z}$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Ordre ε^{-1} au bord :

$$-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + p^\varepsilon n = -\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} + q^\varepsilon n$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial z}(x \in \partial\Omega, z = 0)$$

On fait baver cette condition : $\widetilde{V^0} = 0$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

$$V^0 = 0$$

Avec l'ordre zéro de :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\text{div } u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$u^\varepsilon = v^\varepsilon \quad \text{sur } \partial\Omega$$

U^0 **solution de NS dans** $\mathcal{U}$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

ordre ε^0 dans Ω

$$\mathrm{div}\ v^\varepsilon = 0$$

$$\widetilde{V^1_{N,z}} = 0$$

$\widetilde{V^1_N}$ est constante en z donc $\widetilde{V^1_N} = 0$.

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

ordre ε^{-1} dans Ω

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \nabla q^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} v^\varepsilon = 0$$

$$-V^1_{zz} + V^1 + \frac{\partial q^0}{\partial z} n = 0$$

$z \to +\infty$: $\overline{V^1} = 0$

Partie normale : $\dfrac{\partial q^0}{\partial z} = 0$, i.e. $\widetilde{q^0} = 0$

Partie tangentielle : $-\widetilde{V^1_{T,zz}} + V^1_T = 0$ soit

$$\widetilde{V^1_T} = \gamma^1(t,x) e^{-z}$$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Ordre ε^0 au bord :

$$-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + p^\varepsilon n = -\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} + q^\varepsilon n$$

$$-\frac{\partial U^0}{\partial n} + p^0 n = -V_z^1(z=0) + q^0 n$$

Partie tangentielle : $V_z^1(z = 0) = \left(\frac{\partial U^0}{\partial n}\right)_T$ au bord, et donc, en étendant cette condition :

$$\widetilde{V_T^1}(t,x,z) = -\left(\frac{\partial U^0}{\partial n}\right)_T (P(x))e^{-z}$$

$P(x) =$ projection de x sur $\partial\Omega$.

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Ordre ε^0 au bord :

$$-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + p^\varepsilon n = -\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} + q^\varepsilon n$$

$$-\frac{\partial U^0}{\partial n} + p^0 n = -V_z^1(z=0) + q^0 n$$

Partie tangentielle :

$$\widetilde{V_T^1}(t,x,z) = \frac{\partial U^0}{\partial n}(P(x))e^{-z}$$

Partie normale :

$$q^0 = p^0 \text{ au bord}$$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Caractérisation des profils :

$\underline{V^0} = 0$
$\overline{V^1} = 0$
$\widetilde{V^1}(t, x, z) = \dfrac{\partial U^0}{\partial n}(P(x))e^{-z}$

U^0 solution de NS dans $\mathcal{U}$

Ainsi de suite, on caractérise U^1, U^2, V^2.

Les profils existent et sont réguliers sur $[0, T^*[$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Développement asymptotique :

$$u^\varepsilon(t,x) = U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \varepsilon^2 U^2(t,x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_r^\varepsilon(t,x)$$

$$v^\varepsilon(t,x) = \varepsilon\Theta(x)\widetilde{V^1}(t,x,\tfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\overline{V^2}(t,x) + \varepsilon^2\Theta(x)\widetilde{V^2}(t,x,\tfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_r^\varepsilon(t,x)$$

II. Couches limites
C. Cas de la pénalisation

Développement asymptotique :

$$u^\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_r^\varepsilon$$
$$v^\varepsilon = \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_r^\varepsilon$$

Equation du reste :

$$\frac{\partial u_r^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_r^\varepsilon + (U_\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) U_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + \nabla p_r^\varepsilon = R_{flu}^\varepsilon \quad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v_r^\varepsilon + (V_\varepsilon \cdot \nabla) v_r^\varepsilon + (v_r^\varepsilon \cdot \nabla) V_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (v_r^\varepsilon \cdot \nabla) v_r^\varepsilon + \nabla q_r^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} v_r^\varepsilon = R_{obs}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega$$

$$U_\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 \text{ et } V_\varepsilon(t, x) = \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2$$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Développement asymptotique :

$$u^\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_r^\varepsilon$$
$$v^\varepsilon = \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_r^\varepsilon$$

Equation du reste :

$$\frac{\partial u_r^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_r^\varepsilon + (U_\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) U_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + \nabla p_r^\varepsilon = R_{flu}^\varepsilon \qquad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v_r^\varepsilon + (V_\varepsilon \cdot \nabla) v_r^\varepsilon + (v_r^\varepsilon \cdot \nabla) V_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (v_r^\varepsilon \cdot \nabla) v_r^\varepsilon + \nabla q_r^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} v_r^\varepsilon = R_{obs}^\varepsilon \qquad \text{dans } \Omega$$

R_{flu}^ε d'ordre ε^2 et R_{obs}^ε d'ordre ε^0

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Développement asymptotique :

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon &= U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_r^\varepsilon \\
v^\varepsilon &= \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_r^\varepsilon
\end{aligned}
$$

On veut obtenir :

Pour tout $T < T^*$, les termes de reste u_r^ε et v_r^ε sont bornés dans $L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1)$.

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Equation du reste :

$$\frac{\partial u_r^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_r^\varepsilon + (U_\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) U_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + \nabla p_r^\varepsilon = R_{flu}^\varepsilon \qquad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v_r^\varepsilon + (V_\varepsilon \cdot \nabla) v_r^\varepsilon + (v_r^\varepsilon \cdot \nabla) V_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (v_r^\varepsilon \cdot \nabla) v_r^\varepsilon + \nabla q_r^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} v_r^\varepsilon = R_{obs}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega$$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Estimation du terme bilinéaire :

$$\int_{\mathcal{U}} (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon \cdot u_r^\varepsilon = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{U}} \mathrm{div}\; u_r^\varepsilon |u_r^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |u_r^\varepsilon|^2 u_r^\varepsilon \cdot n d\sigma$$

Premier terme : divergence nulle

$$\mathrm{div}\; u_r^\varepsilon = -\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \mathrm{div}\; U_\varepsilon = 0$$

Deuxième terme : continuité du reste au bord

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

Estimation du terme bilinéaire :

Nécessité d'une condition de divergence nulle sur le reste dans Ω

$$\operatorname{div} v_r^\varepsilon = -\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \operatorname{div} V_\varepsilon = \text{ d'ordre } \varepsilon^2$$

On relève cette divergence :

$$\psi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad \operatorname{div} \psi^\varepsilon = -\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \operatorname{div} V_\varepsilon, \quad \|\psi^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq K\varepsilon^2$$

et on estime $w_r^\varepsilon = v_r^\varepsilon - \psi^\varepsilon$

II. Couches limites

C. Cas de la pénalisation

$$\frac{d}{dt}\|\text{reste}\|^2_{L^2} + \|\nabla\text{reste}\|^2_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|v_r^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq K(t)(1 + \|\text{reste}\|^2_{L^2})$$

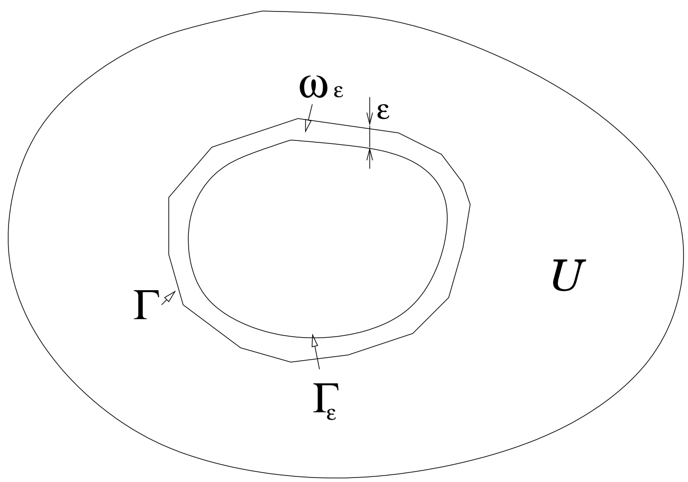
$K \in L^1(0, T; R)$ pour $T < T^*$: Gronwall

Théorème.- *Pour tout $T < T^*$, les termes de reste u_r^ε et v_r^ε sont bornés dans $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$.*

III. Couches minces de matériau poreux

A. Motivation

Flot d'un fluide visqueux autour d'un obstacle entouré d'une couche mince de matériau poreux



$\Omega = \Omega_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon \cup \omega_\varepsilon$

ω_ε : couche mince poreuse d'épaisseur $\kappa\varepsilon$

Ω_ε : obstacle de frontière Γ_ε.

$\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U} \cup \Gamma \cup \omega_\varepsilon$: partie fluide

III. Couches minces de matériau poreux

A. Motivation

Modèle avec faible perméabilité

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \frac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u = f \qquad \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon$$

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_\varepsilon$$

III. Couches minces de matériau poreux

A. Motivation

Modèle avec faible perméabilité

Modèle de Brinkmann stationnaire

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f & \text{dans } \mathcal{U} \\
-\Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon} u + \nabla p = 0 & \text{dans } \omega_\varepsilon \\
\text{div } u = 0 & \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon \\
u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\
[u] = 0 \text{ et } \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} - pn \right] = \dfrac{1}{2} |u|^2 n & \text{sur } \Gamma
\end{array}
$$

III. Couches minces de matériau poreux

A. Motivation

Modèle avec faible perméabilité
Modèle de Brinkmann stationnaire
Modèle avec condition au bord équivalente

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f && \text{dans } \mathcal{U} \\
&\text{div } u = 0 && \text{dans } \mathcal{U} \\
&u = -\kappa \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_T && \text{sur } \Gamma
\end{aligned}$$

A. Mikelic, *Stationary incompressible viscous fluid flow through a porous boundary*, Z. Angew. Math. Mech. **67** (1987), 273–275

III. Couches minces de matériau poreux

A. Motivation

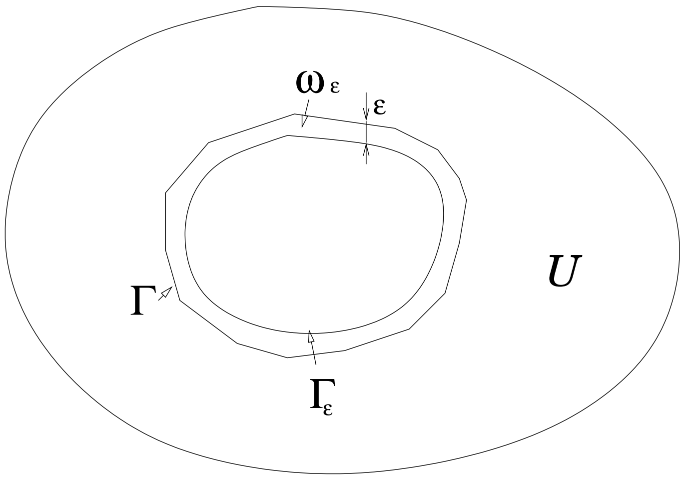
Modèle avec faible perméabilité
Modèle de Brinkmann stationnaire
Modèle avec condition au bord équivalente
Méthode numérique par pénalisation

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p + \frac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u + \frac{1}{\varepsilon^2}\chi_{\Omega_\varepsilon} u = f \qquad && \text{dans } \mathcal{O} \\ &\operatorname{div} u = 0 && \text{dans } \mathcal{O} \end{aligned}$$

Ch.-H. Bruneau, I. Mortazavi, *Contrôle passif d'écoulements incompressibles autour d'obstacles à l'aide de milieux poreux*, C. R. Acad. Sci. Paris, **328** (2001), 517–521

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces



Paramétrisation de ω_ε par $\Gamma \times]0, \kappa\varepsilon[$ avec $\Psi : x \mapsto (P(x), \mathrm{dist}(x, \Gamma))$

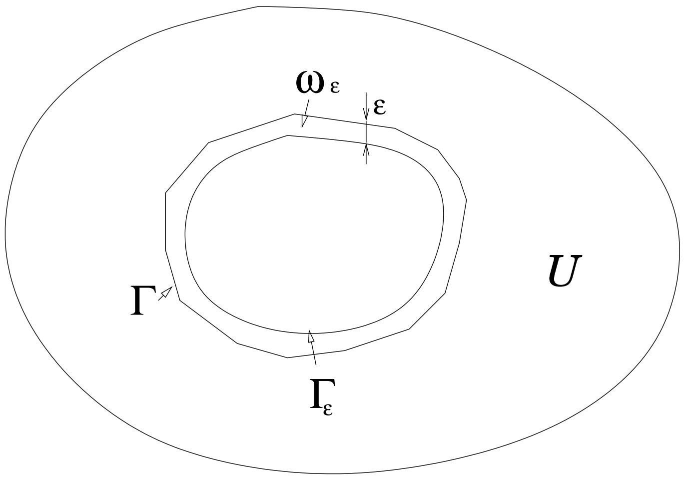
Si $u : \omega_\varepsilon \longrightarrow I\!R$, $u = \tilde{u} \circ \Psi$

$$\nabla u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} n + \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} \tilde{u}$$

$$\nabla_{\Gamma_s} \tilde{u} = (Id + s\, dn(\sigma))^{-1} \nabla_{\Gamma} \tilde{u}$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces



$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \frac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u = f \qquad \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon$$

$$\text{div } u = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_\varepsilon$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \qquad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \nabla q^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon$$

$$\text{div } u^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{U}$$

$$\text{div } v^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon$$

$$u^\varepsilon = v^\varepsilon \qquad \text{sur } \Gamma$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - p^\varepsilon n = \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} - q^\varepsilon n \qquad \text{sur } \Gamma$$

$$v^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_\varepsilon$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Dans ω_ε, on décrit v^ε par

$$v^\varepsilon(t,x) = V^0(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon V^1(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \ldots$$

V^i définis sur le domaine fixe sur $\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma \times [0, \kappa]$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

BKW classique : on caractérise les profils en identifiant les puissances de ε

- Développement asymptotique des opérateurs de dérivation :

$$\nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} = \nabla_{\Gamma_{\varepsilon \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}}} = \nabla_{\Gamma} + \varepsilon z \nabla'_{\Gamma} + \dots$$

- Profils dans la couche mince polynomiaux en z

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Caractérisation des profils :

U_0 : solution de NS avec conditions de Dirichlet dans $\mathcal{U}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^1}{\partial t} - \Delta U^1 + (U^1 \cdot \nabla) U^0 + (U^0 \cdot \nabla) U^1 + \nabla p^1 = 0 & \text{dans } \mathcal{U} \\ \text{div } U^1 = 0 & \text{dans } \mathcal{U} \\ U^1 = -\kappa \dfrac{\partial U^0}{\partial n} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$V^0 = 0$ et

$$V^1(t, \sigma, z) = (z - \kappa) \frac{\partial U^0}{\partial n}(t, \sigma)$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Caractérisation des profils :

Estimation du reste :

$$u^\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + ... \qquad +\varepsilon^2 u_r^\varepsilon$$

$$v^\varepsilon = \varepsilon V^1(P(x), \varphi(x)/\varepsilon) + ... \qquad +\varepsilon^2 v_r^\varepsilon$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Caractérisation des profils :

Estimation du reste :

$$u^\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 + \varepsilon^3 U_3 \quad + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon$$

$$v^\varepsilon = \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3 \qquad\qquad + \varepsilon^2 v_r^\varepsilon$$

Perte en ε^{-1} pour relever la divergence dans la couche mince

$$\Longrightarrow$$

On doit mener le développement un cran plus loin pour un reste de même ordre

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Caractérisation des profils :

Estimation du reste : relèvement de la divergence

Proposition.- *Pour* Ω *fixé, si* $g \in L^2(\Omega)$ *est d'intégrale nulle, il existe* $\psi \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $\operatorname{div} \psi = g$ *avec*

$$\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Caractérisation des profils :

Estimation du reste : relèvement de la divergence

Proposition.- *Pour tout ε, si $g \in L^2(\omega_\varepsilon)$ est d'intégrale nulle, il existe $\psi \in H_0^1(\omega_\varepsilon)$ tel que* $\operatorname{div} \psi = g$ *avec*

$$\|\psi\|_{H_0^1(\omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{\varepsilon} \|g\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Proposition.- *Pour tout ε, si $g \in L^2(\omega_\varepsilon)$ est d'intégrale nulle, il existe $\psi \in H_0^1(\omega_\varepsilon)$ tel que* $\mathrm{div}\,\psi = g$ *avec*

$$\|\psi\|_{H_0^1(\omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{\varepsilon}\|g\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

Preuve (couche mince plane). Dans $\omega_\varepsilon = \omega\times]0,\varepsilon[$, on fait un changement d'échelle :

$$u(x,y,z) = (Y_1(x,y,\frac{z}{\varepsilon}), Y_2(x,y,\frac{z}{\varepsilon}), \varepsilon Y_3(x,y,\frac{z}{\varepsilon}))$$

$$\mathrm{div}\, u = g \text{ dans } \omega_\varepsilon \Leftrightarrow \mathrm{div}\, Y = \tilde{g} = g(x,y,\varepsilon z) \text{ dans } \omega_1$$

$$\|Y\|_{H_0^1(\omega_1)} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2(\omega_1)} \Longrightarrow \|u\|_{H_0^1(\omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{\varepsilon}\|g\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Faible perméabilité

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u^\varepsilon = f && \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon \\
&\text{div } u^\varepsilon = 0 && \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon \\
&u^\varepsilon = 0 && \text{sur } \Gamma_\varepsilon
\end{aligned}$$

Théorème.- *Dans la partie fluide,* $u^\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon$, *où* u_r^ε *est borné dans* $L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{U})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{U}))$, *avec*

- U_0 *solution de NS avec Dirichlet homogène au bord*
- U_1 *solution du linéarisé de NS autour de* U_0 *avec* $U_1 = -\kappa \dfrac{\partial U^0}{\partial n}$ *au bord*

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Faible perméabilité

Brinkmann

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f & \text{dans } \mathcal{U} \\
-\Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon} u + \nabla p = 0 & \text{dans } \omega_\varepsilon \\
\operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathcal{U}_\varepsilon \\
u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\
[u] = 0 \text{ et } \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} - p n \right] = \dfrac{1}{2} |u|^2 n & \text{sur } \Gamma
\end{array}
$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Faible perméabilité

Brinkmann

Condition au bord équivalente

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f && \text{dans } \mathcal{U} \\
&\operatorname{div} u = 0 && \text{dans } \mathcal{U} \\
&u = -\kappa \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_T && \text{sur } \Gamma
\end{aligned}
$$

III. Couches minces de matériau poreux

B. Développement asymptotique pour les couches minces

Faible perméabilité

Brinkmann

Condition au bord équivalente

Théorème.- *Dans la partie fluide, ces trois modèles admettent le même développement asymptotique avec reste d'ordre 2.*

III. Couches minces de matériau poreux

C. Méthode numérique par pénalisation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \frac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u + \frac{1}{\varepsilon^2}\chi_{\Omega_\varepsilon} u = f \qquad \text{dans } \mathcal{O}$$

$$\text{div } u = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{O}$$

Couplage du développement dans la couche mince avec le développement asymptotique de la couche limite dans l'obstacle

III. Couches minces de matériau poreux

C. Méthode numérique par pénalisation

Développement asymptotique à l'ordre 2.

Dans le fluide, $u^\varepsilon = U^0 + \varepsilon \mathbf{U}^1 + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{U}^1}{\partial t} - \Delta \mathbf{U}^1 + (\mathbf{U}^1 \cdot \nabla) U^0 + (U^0 \cdot \nabla) \mathbf{U}^1 + \nabla p^1 = 0 & \text{dans } \mathcal{U} \\ \text{div } \mathbf{U}^1 = 0 & \text{dans } \mathcal{U} \\ \mathbf{U}^1 = -(\kappa + 1) \dfrac{\partial U^0}{\partial n} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Conclusions, perspectives

La méthode de pénalisation crée une couche limite uniquement dans l'obstacle

Méthode BKW : géométrie complexe, mais nécessite de la régularité

Cas d'un obstacle mobile ?