Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Rappel

Soit X une variable aléatoire gaussienne d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 \neq 0$ c'est-à-dire que X a pour densité $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$. On note cette loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Une variable aléatoire constante égale à m est une variable aléatoire gaussienne dégénérée, de loi $\mathcal{N}(m, 0)$.

On dit que la variable est centrée réduite si $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors

$$\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors on a

$$\text{pour tout t } \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \mathbb{E}(\exp(itX)) = \exp\left(itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Si X est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite alors

$$\mathbb{E}(X^{2n-1}) = 0 \quad \text{ et } \quad \mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Exercice 2.

1) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyennes $m_1, \ldots, m_n$ et de variances $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Vérifier que la variable aléatoire $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $a_1m_1 + \cdots + a_nm_n$ et de variance $a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2$.
2) Soit X_1 de loi normale centrée réduite et $X_2 = -X_1$. Pour $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ déterminer la loi de $a_1X_1 + a_2X_2$. Conclure.
3) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrer que les variables aléatoires $Y = \sum_{i=1}^n a_iX_i$ et $Z = \sum_{i=1}^n b_iX_i$ sont indépendantes si et seulement si $\sum_{i=1}^n a_ib_i = 0$.

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et Y une variable aléatoire indépendante de X, ne prenant que les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1-p$ et p, où $0 < p < 1$. On pose $Z = XY$.
1) Quelle est la loi de Z ? Le couple (X, Z) est-il gaussien ?
2) Montrer que pour tout p, X et Z ne sont pas indépendantes.
3) Montrer cependant que pour p bien choisi $\mathrm{cov}(X, Z) = 0$.

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire réele de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $a > 0$. On pose $Y_a = X1_{\{|X|<a\}} - X1_{\{|X|\geq a\}}$.
1) Montrer que Y_a est une variable aléatoire réele gaussienne.
2) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b x^2 \exp(-x^2/2) dx = \frac{1}{4}.$$

3) Calculer la covariance de X et Y_b. Le couple (X, Y_b) forme-t-il un vecteur gaussien ?

Exercice 5.

Soient $X_1, \dots, X_p$ et $Y_1, \dots, Y_q$ des variables aléatoires. On pose

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_q \end{pmatrix}$$

1) Montrer que si X est indépendant de chacune des variables Y_i, cela n'entraîne pas en général l'indépendance des deux vecteurs X et Y. On considèrera l'expérience suivante : on jette deux dés ; on pose

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{ \text{ le premier dé donne un résultat pair } \} \\ B & = & \{ \text{ le deuxième dé donne un résultat pair } \} \\ C & = & \{ \text{ la somme des résultats donne un résultat pair } \}; \end{array}$$

puis on posera $X = 1_A$, $Y_1 = 1_B$ et $Y_2 = 1_C$.
2) En revanche si $Z^t = (X_1, \dots, X_p, Y_1 \dots, Y_q)$ est gaussien, alors l'indépendance de X et Y équivaut à l'indépendance de X et des Y_i ou encore des X_i et des Y_i.

Exercice 6. Densité d'un vecteur gaussien

Soit X un vecteur gaussien de matrice de covariance C et d'espérance m. On suppose que $C = ADA^t$ où D est diagonale et A orthogonale. On considère le vecteur aléatoire $Y = A^t(X-m)$.
1) Montrer que Y est un vecteur gaussien.
2) Déterminer l'espérance m_Y de Y .
3) Déterminer la matrice de covariance C_Y de Y. En déduire que les Y_k sont indépendants.
4) On suppose de plus que C est définie positive. On a alors D inversible.

a. Quelle est la loi de Y_k ? En déduire que Y a une densité que l'on explicitera.

b. Montrer que X a une densité que l'on déterminera.

Exercice 7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance et de variance finies. On va montrer l'équivalence suivante

$$\text{la loi des } X_i \text{ est normale} \iff \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \text{ sont indépendantes}$$

1) On commence par supposer que $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Déterminer les lois de $\overline{X}$ et de $n\Sigma^2/\sigma^2$ où

$$\Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$$

Montrer que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.
2) On suppose maintenant que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes. On note ϕ la fonction caractéristique des X_i. On suppose de plus $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Calculer $\mathbb{E}[nS^2]$ et montrer que

$$\mathbb{E}[nS^2 e^{itn\overline{X}}] = (n-1)\sigma^2\phi^n(t)$$

pour tout réel t. En calculant directement $\mathbb{E}[nS^2 e^{itn\overline{X}}]$, déduire que ϕ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\phi''}{\phi} - \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = -\sigma^2 \\ \phi(0) = 1, \ \phi'(0) = 1 \end{cases}$$

En déduire que $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse $\mathbb{E}[X_i] = 0$.

Exercice 8. Espérance conditionnelle pour un vecteur gaussien.

Soit (X, Y) un vecteur gaussien.
1) En utilisant le fait que $(X, Y - a - bX)$ est un vecteur gaussien pour tout couple (a, b) de réels, montrer que $\mathbb{E}(Y|X)$ est de la forme $a + bX$.
2) Déterminer $\mathbb{E}(Y|X + Y)$ et retrouver géométriquement le résultat si (X, Y) est centré réduit.

Exercice 9. Les ventes annuelles du rayon jouets d'une grande surface sont représentées par une variable aléatoire normale X d'espérance μ_X et de variance σ_X^2. Le bénéfice l'est par une variable aléatoire normale Y d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2. Le paramètre ρ désigne la corrélation entre les ventes et le bénéfice.
1) Si les ventes s'élèvent à un montant x, quelle est la densité de probabilité du bénéfice ?
2) Quelle est la densité de $\mathbb{E}(Y|X)$?

Exercice 10. Supposons que l'indice Dow Jones, noté D, soit une variable aléatoire distribuée selon la loi $\mathcal{N}(\nu, \tau^2)$. Soit S le Swiss Market Index. La densité conditionnelle de S sachant que $D = d$ est une loi normale d'espérance d et de variance σ^2.
1) Quelle est la distribution conjointe du couple (D, S) ?
2) Quelle est la distribution conditionnelle de D sachant que $S = s$?
3) A partir de données historiques on connaît les valeurs de ν, τ et σ. Ayant observé une valeur s pour le Swiss Market Index, calculer le meilleur prédicteur pour l'indice Dow Jones.

Exercice 11. Coefficient de corrélation linéaire et rapport de corrélation.

L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est muni de la norme $||X||^2 = \mathbb{E}[X^2]$ associée au produit scalaire $< X, Y >= \mathbb{E}(XY) = \text{cov}(X, Y)$. C'est un espace de Hilbert, que l'on notera H.

Soient $X \in H$ et $Y \in H$ deux variables aléatoires non constantes. On appelle rapport de corrélation de Y sur X le réel positif r tel que

$$1 - r^2 = \frac{\text{Var}(Y - \mathbb{E}(Y|X))}{\text{Var}(Y)} = \frac{||Y - \mathbb{E}(Y|X)||^2}{||Y - \mathbb{E}(Y)||^2}.$$

1) Interpréter géométriquement r. Montrer que $0 \leq r \leq 1$. Que peut-on dire si $r = 0$ et $r = 1$?
2) Montrer que pour toute variable aléatoire $Z \in H$, $X - mesurable$, on a

$$\frac{||Y - Z||^2}{||Y - \mathbb{E}(Y)||^2} \geq 1 - r^2.$$

3) Déterminer les deux réels $\hat{a}$ et $\hat{b}$ tels que

$$||Y - \hat{a} - \hat{b}X||^2 = \min\{||Y - a - bX||^2,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

La variable aléatoire $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$ est la fonction affine de X la plus proche de Y au sens de la norme L^2. C'est la régression linéaire de Y sur X. Vérifier que

$$\mathbb{E}[Y - \hat{Y}] = 0.$$

4) Soit ρ le coefficient de corrélation linéaire de Y et de X, défini par

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}.$$

Montrer que

$$1 - \rho^2 = \frac{||Y - \hat{a} - \hat{b}X||^2}{||Y - \mathbb{E}(Y)||^2}.$$

et vérifier que $\rho^2 \leq r^2$.
5) Montrer que $\rho^2 = r^2$ si et seulement si $E(Y|X) = \hat{a} + \hat{b}X$ presque sûrement.
6) Montrer que si $\rho = \pm 1$ alors $Y = \hat{a} + \hat{b}X$ presque sûrement.