Probabilités-Statistiques TP 3
Illustration numérique de convergences

Rappel : taper `vnc://nom_du_serveur` dans un terminal.
Les sujets et les corrigés des TPs sont mis après séances sur ma page :
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~chabanol/stat.html
Pour illustrer une convergence p.s. $X_n \to X$, on fait comme pour illustrer la convergence d'une suite (u_n) : on génère une instance de la suite $(X_1, \ldots, X_{n_0})$ (avec n_0 grand), on trace X_n en fonction de n et on montre que "la courbe semble avoir une asymptote horizontale". Si la limite X est aléatoire, la limite observée sera différente si on recommence l'expérience avec une autre instance de la suite.
Pour illustrer une convergence en loi $X_n \to X$, on fixe n_0 grand et on "illustre" que X_{n_0} et X ont à peu près même loi, par exemple à l'aide d'un échantillon de X_{n_0}.

1. Convergence presque sûre vers une constante

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose pour tout entier n $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(1) Quel est le sens de variation de la suite M_n ? Pourquoi M_n converge-t-elle p.s ?

(2) Générer un échantillon $(X_1, \ldots, X_{n_0})$ et obtenir le vecteur $(M_1, \ldots, M_{n_0})$ correspondant (on a donc $M_1 = X_1, M_2 = \max(X_1, X_2)$ etc).
Illustrer la convergence précédente en traçant M_n en fonction de n; recommencer l'expérience avec un autre échantillon; la limite semble-t-elle aléatoire ? Devinez-la (si ce n'est pas déjà fait...) .

2. Illustration de la loi des grands nombres

Rappel : d'après la loi forte des grands nombres, si $(X_n)_{n\in N}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes intégrables, de même loi, d'espérance m, alors pour presque tout ω, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i(\omega)}{n}$ converge vers m : la moyenne arithmétique converge vers l'espérance.
On va par exemple travailler avec une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (on va simuler un lancer de dés), d'espérance 3.5.

(1) *Générer un échantillon de X de taille* 5000*; obtenir un vecteur de taille 5000 dont la n-ième coordonnée est $\sum_{i=1}^n X_i$ (penser à* `cumsum`*); puis obtenir un vecteur avec les valeurs successives des $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ pour n allant de 1 à 5000.*

(2) *Représenter sur un même graphe les $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ en fonction de n, ainsi qu'une droite horizontale correspondant à l'espérance : on peut constater la convergence.*

(3) *Question subsidiaire. Refaire l'expérience avec une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur* $[0,1]$.

3. Convergence presque sûre mais pas vers une constante

La loi forte des grands nombres garantit la convergence presque sûre vers une constante (l'espérance). Mais on peut aussi dans d'autres situations converger vers une variable aléatoire non constante.

(1) *Générer un 30-échantillon E de loi de Bernoulli de paramètre* 0.5.

(2) *Obtenir un vecteur contenant les $\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{2^i}$, pour n allant de 1 à 30.*

(3) *La suite $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{2^i}$ vous semble-t-elle converger ? Vers quelle valeur ? (faites une figure avec matlab)*

(4) *Refaites l'expérience avec un autre échantillon* : on observe encore une convergence (il y a encore convergence p.s.), mais la limite est différente : elle est aléatoire.

(5) Pour observer la loi de cette valeur limite, on va en fait illustrer la convergence en loi. Pour cela, on fixe $n_0 = 30$ (dans cette situation cela correspond déjà à une grande valeur en fait...); on va avoir besoin de beaucoup de tels échantillons de E (par exemple 2000), pour lesquels on va retenir uniquement la valeur “limite” (correspondant à n_0) $\sum_{i=1}^{30} \frac{E_i}{2^i}$, et on va observer comment sont réparties ces valeurs limites.
Mettre dans un vecteur les 2000 valeurs obtenues pour $\sum_{i=1}^{30} \frac{E_i}{2^i}$ *lorsqu'on effectue 2000 fois les questions précédentes. Tracer la fonction de répartition empirique de ces valeurs. A votre avis, quelle est la loi limite ?*

(6) *Question subsidiaire. Mêmes questions si* E *ne suit pas une loi de Bernoulli mais une loi uniforme sur* $\{-1, 1\}$.
Pour les curieux : la série $\sum_n \frac{A_n}{3^n}$ où les A_n sont i.i.d de loi uniforme sur $\{0, 2\}$ converge en loi vers une loi uniforme sur l'ensemble de Cantor.

4. Théorème de Moivre Laplace

On va illustrer le fait que si S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p), si on note $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p}}$ alors pour tout réel x $P(Z_n \leq x)$ converge vers $\Phi(x)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

(1) Ecrire une fonction qui prend en entrée x, n, p et fournit $P(Z_n \leq x)$ (penser à *pbinom*).

(2) Tracer pour $n = 90$ et $p = 0.8$ la fonction de répartition de Z_n sur $[-3, 3]$ et comparer avec la courbe représentative de Φ.

(3) Faire de même avec $n = 1000$ et $p = 0.8$ puis $n = 90$ et $p = 0.99$.