Licence Mathématiques 2010/2011
Géométrie différentielle
Correction de la fin de l'exo 9 du dernier TD

3.

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)$. On a alors $\gamma^*(\omega)(t) = \frac{(\cos t(\cos t dt) - \sin t(-\sin t dt))}{(\cos^2 t + \sin^2 t)} = dt$. Donc $\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$.
(on aurait pu aussi appliquer la formule, qui revient au même,
$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))dt$:
en effet on a bien pour toute 1-forme ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction lisse de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ $\gamma^*(\omega(t)) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))dt$.
Or si ω était exacte, on aurait $\omega = dg$ où g est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donc
$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} dg(\gamma(t))(\gamma'(t))dt = \int_0^{2\pi}(g \circ \gamma)'(t)dt = g \circ \gamma(0) - g \circ \gamma(2\pi) = 0$
car $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.
Ainsi ω n'est pas exacte.

4.

$\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
On a donc $\Phi^*(dx) = \cos(\theta)d\rho - \rho\sin(\theta)d\theta$ et $\Phi^*(dy) = \sin(\theta)d\rho + \rho\cos(\theta)d\theta$.
Ainsi $\Phi^*(\omega)(\rho, \theta) = \frac{\rho\cos(\theta)(\sin(\theta)d\rho + \rho\cos(\theta)d\theta) - \rho\sin(\theta)(\cos(\theta)d\rho - \rho\sin(\theta)d\theta)}{\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta)} = d\theta$.
On aurait pu aussi calculer, en notant e_1 et e_2 les vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$
$\Phi^*(\omega)(\rho, \theta)(e_1) = \omega(\Phi(\rho, \theta))(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho})$
Or $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ donc $\omega(\Phi(\rho, \theta))(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}) = \frac{\rho\cos(\theta)\sin(\theta) - \rho\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta)} = 0$ et de même $\Phi^*(\omega)(\rho, \theta)(e_2) = 1$ d'où $\Phi^*(\omega)(\rho, \theta) = 0d\rho + 1d\theta = d\theta$.

5a.

On vérifie facilement que Φ est injective (puisque le cos et le sin d'un angle le déterminent à 2π près) et que Φ est surjective (si $a^2 + b^2 = 1$, il existe un $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin(\theta)$); comme $(x, y) \not in]-\infty, 0] \times \{0\}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$. De plus Φ est C^∞ et le jacobien de Φ est $|\det(d\Phi(\rho, \theta))| = \rho \neq 0$. Donc Φ est un difféomorphisme local. Comme elle est bijective, cela garantit donc que sa réciproque est C^∞, et Φ est donc bien un C^∞ difféomorphisme.
Il suffit alors de définir $h = (r, \phi) = \Phi^{-1} \circ \gamma$ (bien définie car γ est à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \backslash]-\infty, 0] \times \{0\}$, et C^2 car γ l'est). (h est "l'équation de l'arc $\gamma(I)$ en coordonnées pôlaires").

5b.

En utilisant $\gamma(t) = (r(t)\cos(\phi(t), r(t)\sin(\phi(t))$, on trouve après simplification
$\gamma^*\omega(t) = \frac{r^2(t)\cos^2(\phi(t))\phi'(t) + r(t)r'(t)\cos(\phi(t))\sin(\phi(t)) - r(t)r'(t)\cos(\phi(t))\sin(\phi(t)) + r^2(t)\sin^2(\phi(t))\phi'(t)}{r^2(t)} = \phi'(t)dt$
On aurait pu aussi faire moins de calcul en utilisant $\gamma = \Phi \circ h$. On a alors $\gamma^*\omega = h^*(\Phi^*(\omega)) = h^*(d\theta) = \phi'(t)dt$
Finalement on a $\int_{\gamma|[a,b]} \omega = \int_a^b \phi'(t)dt = \phi(b) - \phi(a)$: ω permet de trouver la variation de l'angle, et $\int_{\gamma|[a,b]} \omega$ donne l'angle qui sépare $(O\gamma(a), O\gamma(b)$.