TP noté

Me rendre TOUS les fichiers nécessaires par mail à la fin et les calculs sur papier
Vous pouvez mettre des commentaires avec matlab en commençant une ligne par %; essayez de séparer les réponses numériques aux différentes questions par une ligne débutant par %%

Mon mail : chabanol@math.u-bordeaux1.fr

Les questions "N" demandent une réponse numérique, les questions "T" une réponse théorique.

`Exercice 1.`

(1) (N) Générer un échantillon de points (X, Y) dans le plan de loi uniforme sur le quart de disque de centre O de rayon 1 situé dans le quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(2) (NT) Observer numériquement la fonction de répartition empirique du rayon $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$. r est-il distribué de manière uniforme ? Déterminer sa fonction de répartition théorique et comparer à la fonction de répartition empirique.

(3) (NT) Même question avec l'abscisse X.

`Exercice 2.`

(1) (T) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Peut-on appliquer la loi forte des grands nombres à cette suite ?

(2) (T) Quelle est la fonction de répartition de X_1 ?

(3) (N) Numériquement, observez-vous une convergence presque sûre de $M_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$?

(4) (T) On admettra que la fonction caractéristique de X_1 est $E[\exp(itX_1)] = \exp(-|t|)$. En déduire la fonction caractéristique de M_n.

(5) (TN) A-t-on convergence en loi des M_n, si oui vers quelle loi ? Illustrer ce résultat numériquement.

`Exercice 3.` Une urne contient initialement r boules rouges et b boules bleues. Une opération consiste à tirer une boule au hasard dans l'urne, regarder sa couleur, et la remettre avec une boule de la même couleur dans l'urne (donc à chaque opération le nombre de boules est augmenté de 1). On note R_n le nombre de boules rouges après la n-ième opération, X_n la proportion de boules rouges au bout de n opérations et Y_n la proportion de boules bleues.
On a donc $R_0 = r$, $X_0 = \frac{r}{r+b}$, $X_n = \frac{R_n}{r+b+n}$.

(1) (T) Expliquer pourquoi si $k \geq r$ $P(R_{n+1} = k+1 | R_n = k) = \frac{k}{r+b+n}$.
Que vaut $P(R_{n+1} = k | R_n = k)$?

(2) (N) Compléter les points dans la fonction ci-dessous pour qu'en lui donnant en paramètre r, b, n et le nombre de boules rouges à l'instant n elle simule une opération, et fournisse le nombre de boules rouges à l'instant $n+1$:

```
function res=Urne(Rouge,n,r,b)
U=rand(1);
res=Rouge+(U<...);
end;
```

(3) (N) Observez-vous numériquement une convergence presque sûre de X_n, de Y_n et de $\frac{X_n}{Y_n}$? (vous pouvez essayer plusieurs valeurs de r et b). Si oui, la limite de X_n est-elle aléatoire ou déterministe ?

(4) (N) Observer la loi limite de X_n. Pouvez-vous la deviner dans le cas $r = b = 1$?

(5) On suppose dans cette question $r = b = 1$.

   (a) (TN) Déterminer la loi de R_1, de R_2 et de R_3, puis la loi de R_n. (Vous pouvez illustrer numériquement ce résultat).

   (b) (T) En déduire que la fonction caractéristique de R_n est $E[e^{itR_n}] = \frac{e^{it}}{n+1} \frac{(1-e^{it(n+1)})}{1-e^{it}}$.

   (c) (T) En déduire la fonction caractéristique de X_n, et prouver la convergence en loi observée à la question 4.

(6) (N et un peu T) On peut montrer que la loi limite de X_n est une loi beta $\beta(r, b)$, de densité $\frac{x^{r-1}(1-x)^{b-1}1_{[0,1]}(x)}{I(r,b)}$ où $I(r, b) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{b-1}dx$.
Illustrer cette convergence dans le cas $r = 2, b = 1$.

`Exercice 4.` (NT) Zorro est en prison et dispose de 3 euros. Il peut être libéré à condition de payer une caution de 8 euros. Un gardien accepte de parier avec lui : si Zorro parie A euros, il gagne A euros avec probabilité 0.4 et perd A euros avec probabilité 0.6. Déterminer la probabilité qu'il puisse payer sa caution en vous aidant éventuellement de Matlab pour faire les calculs dans les cas suivants :

(1) Il parie 1 euro à chaque fois. (stratégie 1)

(2) Il parie à chaque fois le plus possible (mais pas plus que nécessaire pour atteindre 8 euros en cas de gain) (stratégie 2)

(3) S'il dispose de moins de 4 euros, il utilise la stratégie 1 (c'est-à-dire qu'il parie 1 euro), s'il dispose de strictement plus de 4 euros il utilise la stratégie 2 (il parie ce qu'il faut pour atteindre 8 euros en cas de gain).

Laquelle de ces stratégies lui assure la meilleure probabilité de sortie ?

`Exercice 5. (Ehrenfest)` Soient d balles ($d > 1$) numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. A chaque instant, on tire un nombre i uniformément entre 1 et d, et on change la balle numéro i d'urne. Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants.

(1) (TN) Ecrire la matrice de transition de la chaîne pour $d = 5$.

(2) (N) Vérifier à l'aide de matlab que pour $d = 5$, la loi binomiale de paramètres $(d, \frac{1}{2})$ est invariante.

(3) (T) La chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ?

(4) (N) Pour $d = 5$, déterminer la loi de $X_{10}, X_{20}, X_{50}, X_{51}$ si à l'instant initial l'urne est vide. Observez-vous une convergence vers la loi invariante ?

(5) (N) Même question (avec toujours $d = 5$) si la loi de X_0 est uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(6) (N) On part d'une urne vide. Simuler pour $d = 5$ une trajectoire de la chaîne de Markov et tracer les $(X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_{100})$ en fonction de n.

(7) (N) On dit que la chaîne est ergodique si pour pour tout entier m et pour tout choix de X_0, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{X_k=m}$ converge presque sûrement quand n tend vers l'infini, et que cette limite est $P_{inv}(m)$, où P_{inv} est la loi invariante. Tester numériquement si la chaîne d'Ehrenfest vous semble ergodique.

(8) (TN) On modifie maintenant le problème : A chaque instant, on tire un nombre i uniformément entre 1 et d, et la balle numéro i change alors d'urne avec probabilité $\frac{d}{d+1}$ (et avec probabilité $\frac{1}{d+1}$, rien ne se passe).
Cette nouvelle chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ? Reprendre les questions précédentes et comparer les résultats.