Licence Mathématiques 2009/2010
Géométrie différentielle

TD1 : Courbes

(1) Calculer la longueur de l'astroide de paramétrisation $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$.
(2) Calculer la longueur de la courbe définie par la paramétrisation $x(\theta) = 2\cos(2\theta) - \cos(4\theta)$,
$y(\theta) = -2\sin(2\theta) - \sin(4\theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (on pourra pour alléger les calculs introduire la fonction à valeur complexe $\theta \mapsto z(\theta) = x(\theta) + iy(\theta)$).
(3) On considère une courbe plane donnée en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta)$ où f est une fonction de classe C^1 de $]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}$. Donner l'expression de la longueur de la courbe en fonction de f.
Application : soit $a > 0$; calculer la longueur de la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos(\theta))$, $\theta \in]0, 2\pi[$.
Soient a et b deux réels ¿0; calculer la longueur de la branche de spirale logarithmique d'équation $\rho = a.b^\theta$ entre l'origine et l'angle θ (θ peut être supérieur à 2π).
(4) On appelle cycloïde la trajectoire d'un point fixé à un cercle roulant sans glisser sur une droite. Donner une paramétrisation de la cycloïde passant par l'origine, obtenue en faisant rouler un cercle de rayon R sur l'axe Ox. Calculer la longueur d'une arche de cette cycloïde.
(5) Soit (I, f) un arc paramétré de longueur L. Montrer que $L \geq d(f(a), f(b))$. En déduire que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite.
(6) Soit $x \in [-1, 1]$. Donner une interprétation de $\arccos(x)$ en terme de longueur d'un arc bien choisi. En déduire la dérivée de la fonction arccos, et enfin en déduire la dérivée de sa réciproque cos.
(7) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple régulière de classe C^2 du plan, de longueur L. On définit l'aire orientée entourée la courbe par $A = \int_a^b x(t)y'(t)dt$ (où on a noté $\gamma(t) = (x(t), y(t))$). On veut montrer l'inégalité isopérimétrique $L^2 \geq 4\pi A$.
   (a) Vérifier que l'aire ne dépend que de l'orientation du paramétrage de la courbe.
   (b) Vérifier que dans le cas du cercle unité on trouve bien $A = \pi$.
   (c) Vérifier que pour montrer l'inégalité isopérimétrique on peut se ramener au cas $L = 2\pi$ et $\int_a^b x(t)dt = 0$.
   (d) A l'aide de la formule de Parseval, montrer $\int_a^b x'(t)^2dt \geq \int_a^b x(t)^2dt$.
   (e) En déduire l'inégalité isopérimétrique.
(8) Déterminer le plan osculateur au point de paramètre t des arcs définis par les paramétrisations suivantes :
   (a) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $z(t) = t^4$, $t \in \mathbb{R}$
   (b) $x(t) = a\cos^3(t)$, $y(t) = a\sin^3(t)$, $z(t) = a\cos(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$

(9) Soit (I, f) un arc paramétré lisse régulier de $\mathbb{R}^n$, et F une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. $(I, F \circ f)$ est donc un arc paramétré lisse de $\mathbb{R}^m$.
   (a) Soit $t \in I$. Exprimer $(F \circ f)'(t)$ en fonction de dF et f'.
   (b) En déduire que si dF est en tout point injective (on dit que F est une immersion), $(I, F \circ f)$ est régulier.
   (c) On considère un paramétrage du cercle unité $(\mathbb{R}, (\cos t, \sin t))$; donner un vecteur tangent au point de paramètre t. En déduire un vecteur tangent au point de paramètre t de l'image du cercle par $(x, y) \mapsto (x^2 + y, y)$.

(10) Soient u et v deux fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que $\forall s \in \mathbb{R}, (0, u(s), v(s))$ forme un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. En dérivant les relations $||u||^2 = 1$, $(u, v) = 0$ et $||v||^2 = 1$, que peut-on déduire sur les vecteurs $u'(s)$ et $v'(s)$?

(11) On considère un arc paramétré régulier (I, γ) dont la tangente n'est verticale en aucun point. Montrer qu'on peut trouver un paramétrage par l'abscisse $t \mapsto (t, f(t))$.