

Corrigé du devoir n° 3

Exercice 1.

1. (a) Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de vecteurs propres communs à  $\varphi$  et  $\psi$ . Il existe alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , des scalaires  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  tels que  $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$  et  $\psi(e_i) = \mu_i e_i$ . Il suit que

$$\varphi \circ \psi(e_i) = \varphi(\mu_i e_i) = \lambda_i \mu_i e_i = \psi \circ \varphi(e_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Les applications  $\varphi \circ \psi$  et  $\psi \circ \varphi$  coïncident sur une base et sont donc égales.

- (b) Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable est qu'il annule un polynôme scindé sur  $K$  et à racines simples. Si  $\varphi$  est diagonalisable, il existe donc un polynôme  $P(X) = \prod_{i=1}^t (X - \alpha_i)$ , où les  $\alpha_i$  sont des éléments deux à deux distincts de  $K$ , tel que  $P(\varphi) = 0$ . Si  $F$  est un sous espace de  $E$  stable par  $\varphi$ , on vérifie sans peine que

$$P(\varphi|_F) = P(\varphi)|_F = 0$$

ce qui prouve que  $\varphi|_F$  est diagonalisable, en vertu du critère que l'on vient de rappeler.

- (c) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\psi$  et  $E_\lambda$  le sous-espace propre correspondant. Pour tout  $x \in E_\lambda$ , on a  $\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ , d'où l'on conclut que  $\varphi(E_\lambda) \subset E_\lambda$ . Il en résulte, en appliquant le résultat de la question précédente, que si  $\psi$  est diagonalisable, alors  $\varphi|_{E_\lambda}$  l'est également.
- (d) Sous les hypothèses considérées, la restriction de  $\varphi$  à chacun des sous-espaces propres  $E_{\lambda_i}$  de  $\psi$  est diagonalisable. L'espace  $E$  étant somme directe des sous-espaces  $E_{\lambda_i}$  (puisque  $\psi$  est diagonalisable), on conclut que  $\varphi$  est diagonalisable. De plus, si l'on munit chacun des  $E_{\lambda_i}$  d'une base  $\mathcal{B}_i$ , leur réunion  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$  est une base de  $E$  constituée de vecteurs propres communs à  $\psi$  et  $\varphi$ .
2. Soit  $(\varphi_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes diagonalisables de  $E$  qui commutent deux à deux. Montrons, par récurrence sur  $\dim E$ , qu'ils possèdent une base de vecteurs propres communs. La propriété est claire si  $\dim E = 1$ . Supposons donc que  $E$  soit de dimension  $n > 1$  et que la propriété ait été établie pour tout espace vectoriel de dimension  $\leq n - 1$ . Si tous les  $\varphi_i$  sont des homothéties, il est à nouveau clair qu'ils possèdent une base de vecteurs propres communs (n'importe quelle base de  $E$  convient). Sinon, il existe  $i_0 \in I$  tel que  $\varphi_{i_0}$  possède  $r$  valeurs propres  $\lambda_{i_0,1}, \dots, \lambda_{i_0,r}$ , correspondant à des sous-espaces propres  $E_{\lambda_{i_0,1}}, \dots, E_{\lambda_{i_0,r}}$ , avec  $r \geq 2$ . Comme  $E = \bigoplus_{j=1}^r E_{\lambda_{i_0,j}}$  (puisque  $\varphi_{i_0}$  est diagonalisable), chacun de ces sous-espaces propres est alors de dimension au plus  $n - 1$ . Qui plus est, puisque les  $\varphi_i$  commutent deux à deux, on peut appliquer le résultat de la question (1c) et en déduire que les sous-espaces propres de  $\varphi_{i_0}$  sont stables par chacun des  $\varphi_i$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à chacun d'eux et en déduire qu'ils possèdent une base  $\mathcal{B}_{i_0,j}$  dont les éléments sont vecteurs propres pour tous les  $\varphi_i$ . Par suite,  $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^r \mathcal{B}_{i_0,j}$  est une base de  $E$  constitués de vecteurs propres communs à tous les  $\varphi_i$ .

**Exercice 2.** L'idée est de considérer la projection orthogonale  $\pi$  sur  $F$  comme composée de trois applications linéaires, et d'exprimer leurs matrices dans des bases convenablement choisies : on écrit

$$\pi = i \circ \text{Id}_F \circ \pi_F \tag{1}$$

où

- $\pi_F$  est la projection orthogonale sur  $F$ , vue comme application à valeurs dans  $F$ ,
- $i$  est l'injection canonique de  $F$  dans  $E$ ,
- $\text{Id}_F$  est l'application identité de  $F$ ,

ce que l'on peut schématiser par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & E \\ \pi_F \downarrow & & \uparrow i \\ F & \xrightarrow{\text{Id}_F} & F \end{array}$$

Soient  $\mathcal{B}_0 = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_r\}$  la base de  $F$  dont  $P$  est la matrice génératrice. Autrement dit, si  $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$  on a

$$e_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} \varepsilon_i, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (2)$$

On considère enfin la base duale  $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_r^*\}$  de  $\mathcal{B}$  : c'est la base de  $F$  caractérisée par les relations

$$e_i \cdot e_j^* = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker) pour } 1 \leq i, j \leq r. \quad (3)$$

Si l'on munit  $E$  et  $F$  des bases indiquées dans le diagramme ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} E, \mathcal{B}_0 & \xrightarrow{\pi} & E, \mathcal{B}_0 \\ \pi_F \downarrow & & \uparrow i \\ F, \mathcal{B}^* & \xrightarrow{\text{Id}_F} & F, \mathcal{B} \end{array}$$

la relation (1) se traduit matriciellement par

$$\text{Mat}(\pi, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0) = \text{Mat}(i, \mathcal{B}, \mathcal{B}_0) \text{Mat}(\text{Id}_F, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}) \text{Mat}(\pi_F, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}^*). \quad (4)$$

Il reste à calculer chacune de ces trois matrices. On a clairement,  $\text{Mat}(i, \mathcal{B}, \mathcal{B}_0) = P$ , grâce à (2). Pour la matrice de  $\pi_F$ , on remarque, en posant  $\pi_F(\varepsilon_j) = \pi(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^r a_{k,j} e_k^*$ , que

$$a_{i,j} = \left( \sum_{k=1}^r a_{k,j} e_k^* \right) \cdot e_i = \pi(\varepsilon_j) \cdot e_i = \varepsilon_j \cdot \pi(e_i) = \varepsilon_j \cdot e_i = p_{j,i}$$

l'égalité  $\pi(\varepsilon_j) \cdot e_i = \varepsilon_j \cdot \pi(e_i)$  étant justifiée par le fait que  $\pi$  est un endomorphisme *symétrique* et l'égalité  $\varepsilon_j \cdot \pi(e_i) = \varepsilon_j \cdot e_i$  par le fait que  $e_i$  appartient à  $F$ . Ainsi,

$$\text{Mat}(\pi_F, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}^*) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} = (p_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} = {}^t P.$$

Finalement, en posant  $e_j = \sum_{k=1}^r b_{k,j} e_k^*$ , et en remarquant que  $e_i \cdot e_j = e_i \cdot (\sum_{k=1}^r b_{k,j} e_k^*) = b_{i,j}$  on voit que

$$\text{Mat}(\text{Id}_F, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*) = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r} = (e_i \cdot e_j)_{1 \leq i, j \leq r} = {}^t P P.$$

Par suite

$$\text{Mat}(\text{Id}_F, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}) = (\text{Mat}(\text{Id}_F, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*))^{-1} = ({}^t P P)^{-1}.$$

En rassemblant les résultats obtenus, on obtient bien la formule annoncée.