Renaud Coulangeon
Université Bordeaux 1

Devoir n° 1

À rendre dans la semaine du 19 octobre 2009

Exercice 1. Le but de cet exercice est de donner une preuve élémentaire du résultat suivant :

Tout nombre premier $p \equiv 1 \mod 4$ *est somme de deux carrés.*[1]

1. Soit E un ensemble fini et σ une *involution* de E, c'est-à-dire une application de E dans lui-même vérifiant $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$. On note E^σ l'ensemble des points fixes de σ. Montrer que
$$|E| \equiv |E^\sigma| \mod 2.$$
2. On fixe dans toute cette question un nombre premier p congru à 1 modulo 4 et on pose
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \mid x^2 + 4yz = p\right\}.$$
   (a) Justifier que S est un ensemble fini (*et non vide !*).
   (b) Vérifier que la formule
$$(x,y,z) \mapsto \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z), & \text{si } x < y-z \\ (2y-x, y, x-y+z), & \text{si } y-z < x < 2y \\ (x-2y, x-y+z, y), & \text{si } x > 2y \end{cases}$$
   définit une application de S dans lui-même est quelle est involutive.
   (c) Déterminer E^σ.
   (d) En déduire que l'application $(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$ de S dans lui-même a au moins un point fixe.
   (e) Conclure à l'aide de ce dernier résultat que p peut s'écrire comme somme de deux carrés, c'est-à-dire qu'il existe des entiers naturels a et b tels que $p = a^2 + b^2$.

Exercice 2. Soit n un entier naturel ≥ 2. Montrer que l'on a la formule
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$
[Indication : *exprimer le produit en fonction de* $\zeta := e^{i\frac{\pi}{n}}$, *racine* $2n$*-ième de l'unité dans* $\mathbb{C}$]

[1] Attribué à Fermat (1640), mais la première démonstration connue est due à Euler (1749).