Renaud Coulangeon
Université Bordeaux 1

Devoir n° 3

À rendre dans la semaine du 18 janvier 2010

Dans toute la suite K désigne un corps commutatif. L'espace des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans K est noté $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ ou plus simplement $\mathcal{M}_n(K)$ lorsque $n = m$.

Exercice 1. *Diagonalisation simultanée.*
Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K.

1. Soient φ et ψ des endomorphismes de E.
   (a) On suppose que φ et ψ sont diagonalisables dans une même base, c'est-à-dire qu'ils possèdent une base de vecteurs propres communs. Montrer que φ et ψ commutent.
   (b) Soit F un sous-espace de E stable par φ. Montrer que si φ est diagonalisable, alors sa restriction à F l'est également.
   (c) Supposons que φ et ψ commutent. Montrer que tout sous-espace propre de ψ est stable par φ. En déduire que si φ est diagonalisable, alors sa restriction à tout sous-espace propre de ψ l'est également.
   (d) Montrer enfin que si φ et ψ sont diagonalisables et commutent, alors elles sont diagonalisables dans une même base.
2. Plus généralement, si $(\varphi_i)_{i\in I}$ est une famille d'endormorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, alors ils possèdent une base de vecteurs propres communs. [*récurrence sur n : c'est clair pour $n = 1$; c'est également clair si tous les φ_i sont des homothéties ; sinon, l'un des φ_i possèdent deux valeurs propres distinctes, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ses sous-espaces propres*]

Exercice 2. *Matrice de la projection orthogonale sur un sous-espace*
Dans $E = \mathbb{R}^n$ munie de sa base canonique $\mathcal{B}_0$ (orthonormée pour le produit scalaire standard), on considère un sous espace F de dimension r donné par une "matrice génératrice" $P \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ (autrement dit, P est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'une base de F, exprimés dans la base canonique). Montrer que la matrice M dans $\mathcal{B}_0$ de la projection orthogonale sur F est donnée par

$$M = P\left({}^tPP\right)^{-1}\,{}^tP$$

où ${}^tP$ désigne la matrice transposée de P.