

Feuille n° 1

Théorie des ensembles, Combinatoire.

Exercice 1.

1. Combien le mot ANAGRAMME a-t-il d'anagrammes ?
2. Existe-t-il un polygone convexe régulier à 1325 diagonales. Si oui, combien (à isométrie près) ?
3. (*Formule de Vandermonde*) Montrer que pour tout triplet d'entiers naturels $\{k, m, n\}$ on a

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

[On pourra dénombrer de 2 façons différentes le nombre de sous ensembles à k éléments dans la réunion $E \cup F$ d'un ensemble E à n éléments et d'un ensemble F à m éléments]

En déduire en particulier que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

4. Démontrer que le nombre M_n de mots (au sens large) **sans lettres répétées** que l'on peut faire avec un alphabet de n lettres ($n \geq 2$) est égal à $E[n!e] - 1$ (si x est un nombre réel, $E[x]$ désigne sa *partie entière*).

Exercice 2. *Formule d'inversion de Pascal.*

Étant donnée une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels, on définit la suite (y_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x_p.$$

On souhaite montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} y_p.$$

1. Pour n fixé, considérer la matrice A_n définie par la relation $Y_n = AX_n$, où $X_n = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Trouver une relation entre A_n et la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} de degré au plus n) de l'application linéaire $P(X) \mapsto P(X+1)$. En déduire que A_n est inversible et expliciter A_n^{-1} .

2. Conclure.

Exercice 3. *Nombre de surjections d'un ensemble sur un autre (« Nombres de Stirling »).*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Pour p et n entiers naturels non nuls, on note $S(p, n)$ le nombre de *surjections* de $\llbracket 1, p \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, qui vaut 0 si $p < n$. On suppose donc désormais que $p \geq n$.

1. En évaluant de deux manières différentes le cardinal de l'ensemble des applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

[on pourra considérer, pour tout $1 \leq k \leq n$, l'ensemble des applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont l'image est de cardinal k].

2. En déduire, en appliquant la formule d'inversion de Pascal, que

$$S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 4. Partitions d'un ensemble fini (« Nombres de Bell »).

On appelle n -ième nombre de Bell, et on note B_n , le nombre de partitions d'un ensemble fini de cardinal n (on convient que $B_0 = 1$). Dans la suite, on fixe un ensemble E à n éléments.

1. Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que le nombre de partitions de E en k parties est égal à $\frac{S(n, k)}{k!}$ (notations de l'exercice précédent).
2. En déduire une formule pour le calcul de B_n .
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a la relation

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

4. En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Exercice 5. Quelle relation y a-t-il entre les quantités suivantes :

1. nombre de façons de ranger p objets indiscernables dans n cases,
2. nombre de chemins à pas Nord-Est sur un quadrillage d'origine $O(0, 0)$ et d'extrémité $A(p, n - 1)$,
3. nombre de solutions (x_1, x_2, \dots, x_n) en entiers naturels de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$,
4. nombre de p -uplets $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_p \leq n$,
5. nombre d'applications *croissantes* (au sens large) de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Comment évaluer ces nombres ?

Exercice 6. Applications croissantes d'un ensemble dans un autre.

1. Déterminer le nombre d'*injections* de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, où p et n sont des entiers naturels non nuls.
2. Même question pour le nombre d'applications *strictement croissantes* de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
3. Soit f une application *croissante* (au sens large) de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que l'application $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p + n - 1 \rrbracket$ définie par $g(k) = f(k) + k - 1$ est une application *strictement croissante* de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p + n - 1 \rrbracket$.
4. Montrer que le procédé précédent met en bijection l'ensembles des applications *croissantes* de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et celui des applications *strictement croissantes* de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p + n - 1 \rrbracket$.

5. En déduire le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 7. Un tirage du loto est constitué de 7 nombres pris parmi les entiers entre 1 et 49. Quelle est la probabilité qu'un tel tirage contienne (resp. ne contienne pas) deux entiers consécutifs ?

Exercice 8. Dans une urne, il y a p bulletins pour le candidat P et q bulletins pour le candidat Q . On suppose $p > q$. Le but de cet exercice est de déterminer la probabilité que, durant tout le dépouillement, P soit toujours en tête. On définit une suite $(x_n)_{1 \leq n \leq p+q}$ par

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n^{\text{ième}} \text{ bulletin dépouillé est pour } P \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq p+q}$ par

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{k=1}^n x_k & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Ainsi, y_n représente le résultat provisoire de l'élection après le dépouillement de n bulletins. On représente la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq p+q}$ dans un repère par la ligne polygonale joignant les points de coordonnées (n, y_n) .

1. Calculer le nombre de lignes polygonales (correspondantes à des suites $(y_n)_{0 \leq n \leq p+q}$ possibles) joignant les points $(0, 0)$ et $(p+q, p-q)$.
2. Combien de ces lignes ne rencontrent pas l'axe des abscisses ?
3. Démontrer que la probabilité que, durant tout le dépouillement, P soit toujours en tête est égale à :

$$\frac{p-q}{p+q}.$$

Exercice 9. Sur le nombre de « dérangements » : le problème des chapeaux ou problème de Montmort.

On note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On s'intéresse aux *dérangements* de $\{1, \dots, n\}$, à savoir les éléments de S_n sans point fixe. On note d_n le nombre de dérangements et $r_n = n! - d_n$ le nombre de permutations présentant au moins un point fixe.

1. En notant $S_n(i)$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ qui fixent i , montrer que $r_n = |\bigcup_{i=1}^n S_n(i)|$.
2. Étant donnés k entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, évaluer $|S_n(i_1) \cap S_n(i_2) \cap \dots \cap S_n(i_k)|$.
3. En utilisant la formule (à justifier !)

$$\left| \bigcup_{i=1}^n S_n(i) \right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |S_n(i_1) \cap S_n(i_2) \cap \dots \cap S_n(i_k)|$$

en déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

4. Application : n individus laissent leur chapeau au vestiaire d'un restaurant, qu'ils récupèrent de façon aléatoire à l'issue du dîner. Montrer que la probabilité p_n qu'aucun d'entre eux ne retrouve son propre chapeau tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini.
5. On note $d_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement k points fixes (de sorte que $d_n = d_{n,0}$).
 - (a) Montrer que $\sum_{k=0}^n d_{n,k} = n!$ et que $d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$.
 - (b) En déduire que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$. Retrouver alors, en utilisant la formule d'inversion de Pascal, l'expression de d_n établie à la question 3.

6. Montrer que le nombre moyen de points fixes d'une permutation quelconque est 1.

Exercice 10. On rappelle qu'un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec \mathbb{N} .

Soit $A = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq k \leq n\}$.

1. Montrer que A est en bijection avec \mathbb{N}^2 .
2. Montrer que l'application $\phi : A \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\phi(k, n) = \frac{n(n+1)}{2} + k$ est une bijection.
3. En déduire que \mathbb{N}^2 (et plus généralement \mathbb{N}^n pour $n \geq 1$) est dénombrable.

Exercice 11. (*variante de l'exercice précédent*).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique couple $(l, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^l(2m + 1)$. En déduire une bijection de \mathbb{N} sur \mathbb{N}^2 .