Feuille n° 4

Algèbre linéaire 1.

Dans toute la suite K désigne un corps commutatif.

Exercice 1. Soit E un K-espace vectoriel. Rappeler la définition des notions suivantes :

1. famille génératrice.
2. famille libre.
3. famille génératrice minimale.
4. famille libre maximale.

Quelle relation y a-t-il entre les deux dernières notions ?

Exercice 2. Le théorème de la base incomplète affirme que

> *"Si E est un espace vectoriel sur un corps K, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$."*

1. Démontrer ce résultat lorsque $\mathcal{G}$ est fini.
2. Soient $Y \subset X$ deux parties finies et non vides d'un K-espace vectoriel E. On pose $\operatorname{Card} X = n$, $\operatorname{Card} Y = m$, $\operatorname{rang} X = r$ et $\operatorname{rang} Y = s$. Montrer que $m - s \leq n - r$.
3. Montrer, en utilisant le théorème de la base incomplète, que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E admet un *supplémentaire*, c'est-à-dire un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$.

   Application : montrer que $\mathbb{Q}$, vu comme sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, admet un supplémentaire G, que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui ne contient aucun rationnel non nul, et que la symétrie par rapport à $\mathbb{Q}$ parallèlement à G est une involution de $\mathbb{R}$ continue nulle part et fixant tous les rationnels.

Exercice 3. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

1. Montrer que la différence symétrique $A \bigtriangleup B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ induit une structure de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Si E est fini et de cardinal n, quelle est la dimension du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathcal{P}(E)$?
3. Soit $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_m$ une famille finie de parties de E, strictement croissante pour l'inclusion. Montrer que la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ est libre.
4. On suppose que $E = \{1, \ldots, n\}$. Montrer que l'application $\chi : \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $\chi(x_1, \ldots, x_n) = \{i \in E \mid x_i = 1\}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
5. Plus généralement, si E est un ensemble quelconque, construire un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathbb{F}_2^E$ et $\mathcal{P}(E)$. Quelle est l'image par cet isomorphisme du sous-espace $\mathbb{F}_2^{(E)}$?

Exercice 4. *Intermède : les anneaux booléens.*

Un anneau unitaire est dit booléen s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall a \in A, a^2 = a \tag{1}$$

1. Donner un exemple (le plus simple possible...) d'un tel anneau.

2. Montrer qu'un anneau booléen est de caractéristique 2, c'est-à-dire que tout élément a vérifie la propriété $2a = 0$ (*considérer le carré de* $a+1$). En déduire qu'un anneau booléen est nécessairement commutatif (*considérer le carré de* $a+b$, *où* a *et* b *sont deux éléments distincts de l'anneau*).

3. Montrer qu'un anneau booléen intègre est isomorphe à $\mathbb{Z}/2Z$.

4. Montrer que l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau booléen coïncide avec celui de ses idéaux maximaux.

5. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau booléen.

Exercice 5. Soient F et G deux sous-espaces d'un K-espace vectoriel E, F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que

$$F + G = F \cap G \oplus F' \oplus G'.$$

En déduire, dans le cas où E est de dimension finie, que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \tag{2}$$

(la formule (2) s'appelle classiquement *formule de Grassmann*).

Exercice 6. Soient E et F des K-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. Montrer que tout supplémentaire dans E de $\ker u$ est isomorphe à $\operatorname{Im} u$. En déduire, dans le cas où E et de dimension finie, la relation (« théorème du rang »)

$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rang} u.$$

Exercice 7. Retrouver la formule de Grassmann en appliquant le théorème du rang à l'application $\phi : F \times G \to E$ définie par $\phi(f, g) = f + g$.

Exercice 8. Soit E un$K$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de formes linéaires sur E. Montrer que

$$\dim \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \dim E - \operatorname{rang} \{f_i \ , \ i \in I\} .$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim F = m$ si et seulement si il existe $n - m$ formes linéaires $f_1, \ldots, f_m$ linéairement indépendantes telles que

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-m} \ker f_i.$$

Exercice 9. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si F_1 et F_2 désignent deux sous K-espaces vectoriels de E, montrer que

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2).$$

2. Soit F un sous K-espace vectoriel et H un hyperplan de E. Montrer que $\dim(F \cap H) = \dim F - 1$ si $F \not\subseteq H$.

3. Soit $(H_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'hyperplans de E, et pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$, une forme linéaire f_i telle que $H_i = \ker f_i$. Montrer que
$$\dim \bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i = n - \dim \sum_{1 \leq i \leq p} K f_i$$
et en déduire que
$$n - p \leq \dim \bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i \leq n - 1.$$

Exercice 10. Soient K un corps infini (par exemple, de caractéristique 0), E un K-espace vectoriel de dimension n et E_i $1 \leq i \leq p$ des sous-espaces. On veut montrer que si $E = E_1 \cup \cdots \cup E_p$, alors il existe i tel que $E = E_i$.

1. (le cas $p = 2$) On suppose que $E = E_1 \cup E_2$. Montrer que $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

2. (le cas général) On suppose que
$$E = E_1 \cup \cdots \cup E_p \tag{3}$$
   (a) On suppose tout d'abord que les E_i sont des droites, et que $\dim E \geq 2$. En considérant e_1 et e_2 linéairement indépendants, et $D_\alpha = K(e_1 + \alpha e_2)$, $\alpha \in K$, montrer que $D_\alpha = D_\beta$ si et seulement si $\alpha = \beta$ et conclure à une absurdité.
   (b) On suppose maintenant que les E_i satisfont seulement $\dim E_i < n$. Montrer qu'il existe des hyperplans $H_1, \ldots, H_p$ contenant $E_1, \ldots, E_p$ respectivement et tels que
$$E = H_1 \cup \cdots \cup H_p.$$
   (c) Montrer qu'il existe un hyperplan H distinct de tous les H_i (écrire $H = \ker f$ et appliquer (2a) à E^*).
   (d) Conclure par récurrence sur la dimension en remarquant que
$$H = (H \cap H_1) \cup \cdots \cup (H \cap H_p).$$

3. Contre-exemple si K est fini ?

Exercice 11. Soit $\left(a_0, ..., a_{p-1}\right) \in K^p$. Dans le K-espace vectoriel $K^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans K, on considère l'ensemble
$$V := \left\{ \underline{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+p} = a_0 u_n + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1} \right\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $K^{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que l'application $\underline{u} \mapsto \left(u_0, \ldots, u_{p-1}\right)$ induit un isomorphisme de V sur K^p, et en déduire la dimension de V.

Exercice 12. Soit $V = K^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à valeurs dans le corps K. Pour $q \in K$ on note $g^{(q)}$ la suite des q^n, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\left(g^{(q)}\right)_{q \in K}$ est libre.

Exercice 13. Dans $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on considère la famille des fonctions $x \mapsto e^{ax}$, pour a parcourant $\mathbb{R}$. Montrer que c'est une famille libre.

Exercice 14. Soient $F_1, \ldots, F_k$ des sous K-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. On suppose que

1. $E = F_1 + \cdots + F_k$.
2. $\dim E = \dim F_1 + \cdots + \dim F_k$.

Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$.

Exercice 15. Vrai ou faux : si $F_1, \ldots, F_k$ sont des sous K-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E tels que

1. $E = F_1 + \cdots + F_k$.
2. $F_i \cap F_j = \{0\}$ si $i \neq j$.

alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$?

Exercice 16. Soit E un K-espace vectoriel . Un élément p de $\mathrm{End}(E)$ est un *idempotent* ou un *projecteur* s'il vérifie la relation $p^2 = p$.

1. Expliquer le terme *projecteur*.
2. On suppose désormais que $\operatorname{car} K = 0$. Étant donnés des projecteurs $p_1, \ldots, p_k$, on souhaite montrer que leur somme $p_1 + \cdots + p_k$ est un projecteur si et seulement si $p_i \circ p_j = 0$ pour tous $i \neq j$.
   (a) On suppose que $p_i \circ p_j = 0$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $p_1 + \cdots + p_k$ est un projecteur.
   (b) On suppose, inversement, que $p = p_1 + \cdots + p_k$ est un projecteur.
      i. Montrer que $\mathrm{Im}\, p = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\, p_i$ (établir une relation entre $\dim \mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Trace}\, p$)
      ii. En déduire que $p_i \circ p_j = 0$ pour tous $i \neq j$ (montrer d'abord que $\mathrm{Im}\, p_i \subset \mathrm{Im}\, p$ pour tout i).

Exercice 17. Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E. on suppose qu'il existe un entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que u stabilise tous les sous-espaces de dimension k. Montrer que u est une homothétie.[*Traiter d'abord le cas* $k = 1$.]

Exercice 18. Soient E un$K$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, et u' son adjoint (on rappelle que u' est l'endomorphisme du dual E^* de E défini par la relation $u'(f)(x) = f(u(x))$ pour tout $x \in E$ et tout $f \in E^*$). Si F est un sous-espace de E, montrer que F est stable par u si et seulement si F° est stable par u', où l'on a posé $F^\circ = \{f \in E^* \mid \forall x \in F, f(x) = 0\}$.

Exercice 19. Soit $E = K[X]_n$ l'espace des polynômes à coefficients dans K de degré au plus n. Si K est fini, on suppose qu'il possède au moins $n+1$ éléments. Soient alors $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de K deux à deux distincts.

1. Montrer que les formes linéaires $\delta_i : E \to K$, $P(X) \mapsto P(a_i)$ constituent une base de E^*. Quelle est la base duale ?
2. Soit $P(X) \in K[X]$ de degré exactement n. Montrer que les polynômes $P_i(X) := P(X + a_i)$ forment une base de E [*remarquer que* $\sum \lambda_i P_i^{(k)}(0) = \sum \lambda_i \delta_i(P^{(k)})$].