Devoir n° 3

À rendre pour la semaine du 5 janvier

Exercice 1. Soit $P(X)$ un polynôme unitaire (donc non nul) à coefficients réels et scindé sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire ayant toutes ses racines dans $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Tous les coefficients de $P(X)$ sont positifs ou nuls.
2. Toutes les racines de $P(X)$ sont négatives ou nulles.

Application : soit A une matrice symétrique réelle de taille n, et q la forme quadratique associée, c'est-à-dire $q(x) = {}^t xAx$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ (vecteur colonne). On dit que q (resp. A) est *semi définie positive* si $q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp. ${}^t xAx \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$). Montrer que les propriétés suivantes, pour une matrice symétrique réelle non nulle $A = (A_{ij})_{i \leqslant i,j \leqslant n}$ de taille n, sont équivalentes :

1. A est semi définie positive.
2. Les valeurs propres de A sont positives ou nulles.
3. Les coefficients du polynôme $P(X) := \det(A+XI_n)$ sont positifs ou nuls (I_n désigne la matrice identité de taille n).
4. Pour tout $J \subset \{1, \cdots, n\}$, on a : $\det (A_{i,j})_{i \in J, j \in J} \geqslant 0$.

Exercice 2. Soit K un corps commutatif et $P(X)$ un polynôme à coefficients dans K, scindé sur K, et n'ayant que des racines simples. Montrer que

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)(X - x_i)}.$$

Application : déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{R}(X)$, où n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 3. Soit $\mathcal{P}$ une parabole dans le plan affine euclidien et $\mathcal{C}$ un cercle rencontrant $\mathcal{P}$ en quatre points distincts. Montrer que l'isobarycentre de ces quatre points appartient à l'axe de la parabole [*on pourra se placer dans un repère orthonormé d'origine le sommet de la parabole et d'axe des abscisses la tangente à $\mathcal{P}$ en ce sommet*].