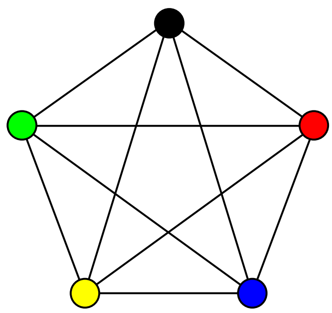
Stage
PAF
2002 - 2003

GRAPHES



Académie de
BORDEAUX

Table des matières

Avertissement

Ce présent document a été inspiré par des travaux de :

- Marie Mégard, IA-IPR ; nous avons recopié certains paragraphes d'un document dont elle est l'auteur et que l'on peut télécharger à l'adresse :
  http://www.apmep.asso.fr/CL02gra.pdf ;
- Éric Sopéna, professeur à Bordeaux 1, qui participe à l'animation de ce stage.

Extrait du programme de spécialité de Terminale ES

BO hs n°4 du 30 août 2001

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Résolution de problèmes à l'aide de graphes		
Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée : - au coloriage d'un graphe, - à la recherche du nombre chromatique, - à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien, - à la recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré ou non, - à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots, - à la recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.	Les problèmes proposés mettront en jeu des graphes simples, la résolution pouvant le plus souvent être faite sans recours à des algorithmes. On indiquera que, pour des graphes complexes, des algorithmes de résolution de certains problèmes sont absolument nécessaires. On présentera un algorithme simple de coloriage des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.	Il s'agit d'un enseignement entièrement fondé sur la résolution de problèmes. L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre. Ces algorithmes seront présentés dans les documents d'accompagnement et on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en œuvre.
Vocabulaire élémentaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.	Les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple).	Les élèves devront savoir utiliser à bon escient le vocabulaire élémentaire des graphes, vocabulaire qui sera réduit au minimum nécessaire à la résolution des problèmes constituant l'enseignement de cette partie.
Résultats élémentaires sur les graphes : - lien entre la somme des degrés des sommets et le nombres d'arêtes d'un graphe ; - conditions d'existence de chaînes et cycles eulériens ; - exemples de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets, pondérés par des probabilités.	On pourra dans des cas élémentaires, interpréter les termes de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice associée à un graphe.	

I Théorème d'Euler

A Quelques définitions

Un **graphe** est constitué d'un nombre fini de sommets et d'arêtes, s'il est non orienté ;
de sommets et d'arcs, s'il est orienté.

L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité.
Une boucle augmente de deux le degré d'un sommet.

Une **chaîne** est une suite alternée de sommets et d'arêtes.

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

La **distance** entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.

Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre entre deux sommets.

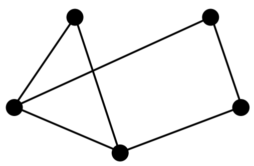
Un **cycle** est une chaîne dont les arêtes sont distinctes et dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

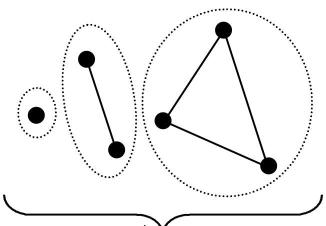
Une chaîne **eulérienne** est une chaîne empruntant une fois et une seule chaque arête du graphe.

Un cycle **eulérien** est un cycle empruntant une fois et une seule chaque arête du graphe.

Un graphe est **connexe** si pour toute paire de sommets du graphe il existe une chaîne les reliant.

graphe connexe





composantes connexes

graphe non connexe

B Théorème d'Euler

Théorème

a) Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair sauf éventuellement deux d'entre eux.

b) Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

La condition est nécessaire

Cas de la chaîne

On considère un sommet qui n'est pas une extrémité : chaque fois que la chaîne passe par ce sommet, elle l'atteint par une arête et en repart par une autre. **Comme chaque arête est utilisée dans la chaîne une fois et une seule**, chaque arête incidente à ce sommet peut être associée à une **autre** arête incidente à ce même sommet. Donc tous les sommets sont pairs sauf éventuellement les deux extrémités.

Cas du cycle
Un cycle n'étant qu'un cas particulier de chaîne, le raisonnement ci-dessus vaut pour un cycle, le cas particulier des extrémités étant exclu.

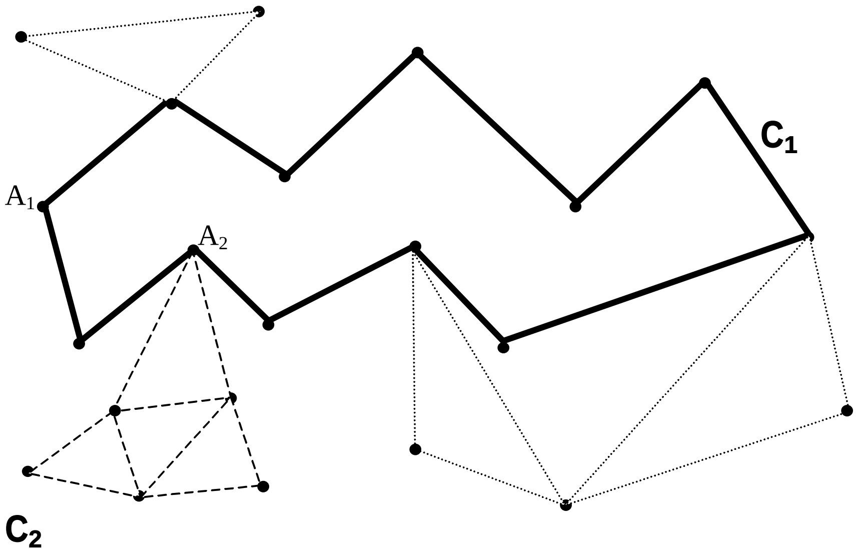
Remarque : la plupart du temps, seule cette propriété "directe" sera mise en œuvre, sous sa forme contraposée.

La condition est suffisante

La partie réciproque du théorème est un peu plus délicate à démontrer. Mais elle présente l'avantage de fournir un procédé de construction d'un cycle eulérien, et à ce titre mérite peut-être d'être exposée aux élèves sur un exemple. De plus, l'utilisation de sous-graphes est efficace pour la résolution de nombreux problèmes, et à ce titre a valeur de méthode.

Notons tout d'abord que le a) du théorème se déduit du b) aisément : si deux sommets seulement sont de degré impair, on peut les relier provisoirement par une arête et mettre en œuvre le b). le cycle obtenu sera transformé en simple chaîne par suppression de l'arête rajoutée au début.

Soit donc un graphe **G** dont tous les sommets sont de degré pair.
Choisissons un sommet A_1 et une arête incidente à A_1, puis considérons l'autre extrémité de cette arête : ce deuxième sommet étant de degré pair, on peut en repartir par une autre arête, et atteindre un « autre » sommet. Si ce dernier est différent de A_1, on peut en repartir à nouveau (car son degré est pair). Ainsi de suite. Comme le graphe possède un nombre fini d'arêtes, la chaîne ainsi formée se referme tôt ou tard en A_1, formant un cycle $\mathbf{C_1}$.

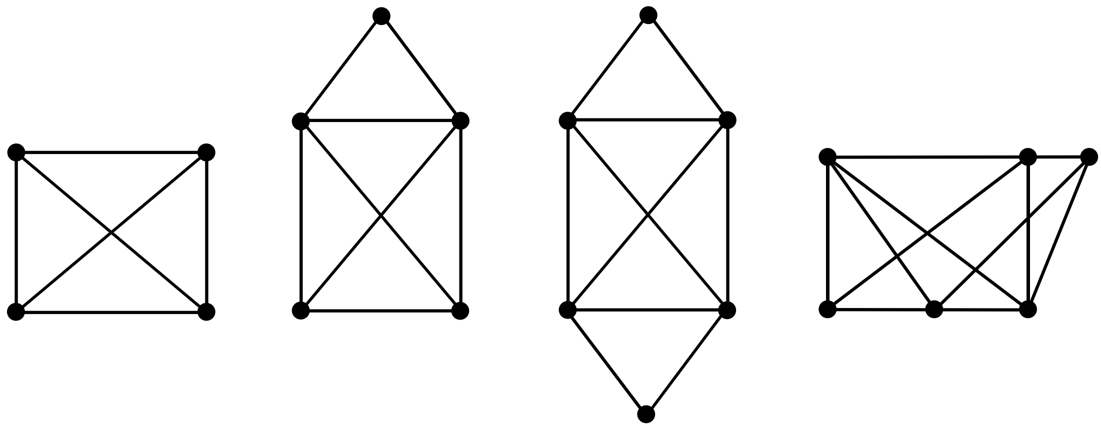


Ce cycle peut être eulérien (s'il utilise toutes les arêtes du graphe). Dans le cas contraire, chacune des composantes restantes vérifie les hypothèses du théorème : elle est finie, connexe, et ses sommets sont de degré pair. De plus, comme le graphe G est connexe, chacune des composantes restantes possède au moins un sommet appartenant à $\mathbf{C_1}$.
Choisissons un tel sommet A_2 pour une des composantes restantes : le même procédé de construction développé plus haut permet d'obtenir un nouveau cycle $\mathbf{C_2}$ contenant A_2. On peut l'insérer dans le cycle $\mathbf{C_1}$ au niveau de A_2.
L'itération de ce procédé jusqu'à épuisement des arêtes, qui est certain puisque le graphe est fini, permet d'écrire pour **G** un cycle eulérien.

C Exercices

Exercice 1

Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !…) ? Pourquoi ?



Exercice 2

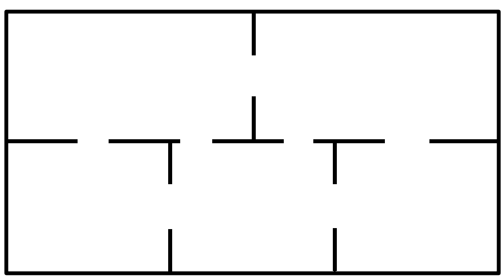
On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

1) En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
2) Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
3) Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
4) Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à *n*, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

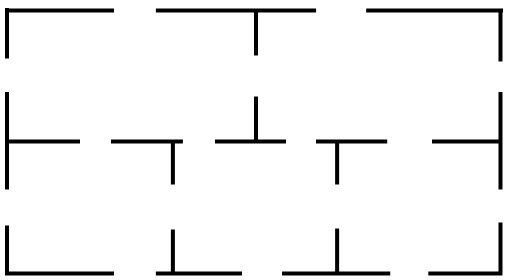
Exercice 3

Est-il possible de se promener dans chacune de ces maisons en passant une et une seule fois par chacune de ses ouvertures ?

a)



b)



II Des degrés et des graphes

A Quelques propriétés

Propriété 1 La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe.
Chaque arête du graphe incrémente de deux la somme des degrés. D'où le résultat.

Propriété 2 La somme des degrés des sommets d'un graphe est un nombre pair.
Conséquence immédiate de la première propriété.

Propriété 3 Dans un graphe, il y a un nombre pair de sommets qui sont de degré impair.
Si tel n'était pas le cas, la somme des degrés serait impaire.

B Exercices

Exercice 1

Les sept collèges de la ville possèdent chacun une équipe de hand-ball. Les professeurs d'EPS souhaitent organiser des rencontres entre ces équipes dans le courant du mois de mai, de telle sorte que chaque équipe en rencontre trois autres.
Peut-on proposer un planning de rencontres ?

Exercice 2

Montrer que le nombre de personnes vivant ou ayant vécu sur terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de mains est pair.

Exercice 3

Un graphe a n sommets et chacun est de degré au moins 2.
Quel nombre minimum d'arêtes contient ce graphe ?

Exercice 4

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est *graphique* s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite (par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite 2, 2, 2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- 3, 3, 2, 1, 1
- 3, 3, 1, 1
- 3, 3, 2, 2
- 4, 2, 1, 1, 1, 1
- 5, 3, 2, 1, 1, 1
- 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1

Trouver deux graphes *distincts*, c'est-à-dire non isomorphes[1] correspondant à la suite 3, 2, 2, 2, 1.

[1] deux graphes G1 et G2 sont isomorphes s'il existe une bijection f entre leurs ensembles de sommets qui préserve les arêtes (f(x)f(y) est une arête de G2 si et seulement si xy est une arête de G1).

III Coloration

A Quelques définitions

Sommets adjacents

Dans un graphe, deux sommets liés par une arête sont dits **adjacents.**

Coloration

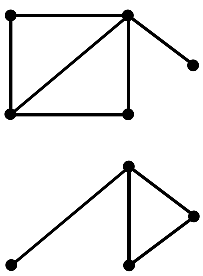
Une **coloration** d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.
Si le graphe est coloré en k couleurs, on dit qu'on a une ***k* coloration** du graphe.

Nombre chromatique

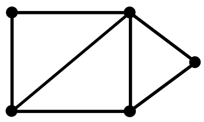
Le **nombre chromatique** d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration, c'est à dire le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.
Remarque : l'existence de ce nombre est assurée car le graphe est fini.

Sous-graphe

Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe dont les sommets et les arêtes sont des sommets et des arêtes de G.



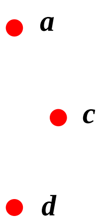
sont des sous-graphes de



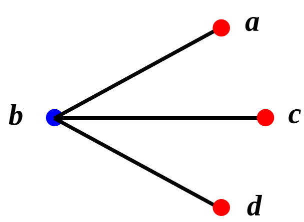
Sous-graphe stable

Un sous-graphe est **stable** si ses sommets ne sont reliés par aucune arête.

et



sont des sous-graphes stables de



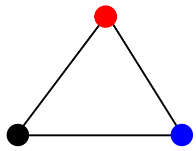
Une k coloration d'un graphe est équivalente à une partition de l'ensemble des sommets de ce graphe en k sous-graphes stables, chacun d'eux contenant les sommets de même couleur.

B Nombres chromatiques de quelques graphes

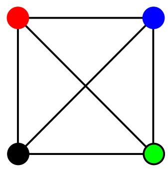
1 Graphes complets

Un **graphe complet** est un graphe dans lequel chaque sommet est adjacent à tous les autres.
Un graphe complet d'ordre *n* est noté K_n (en hommage à Kuratowski).

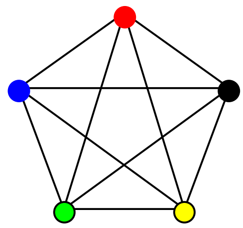
Théorème Le nombre chromatique de K_n est exactement *n*.



K_3



K_4

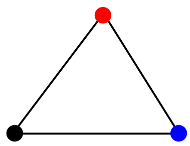


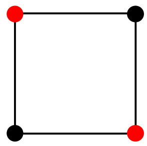
K_5

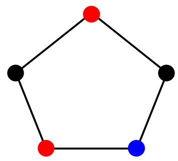
2 Cycles élémentaires

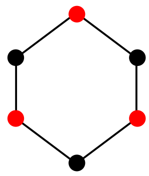
Un **cycle élémentaire** est un cycle qui passe une fois et une seule par chacun des sommets.

Théorème Le nombre chromatique d'un cycle élémentaire est 2 si son nombre de sommets est pair, il est de 3 sinon.









C Propriétés

Propriété 1 Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $r+1$, où *r* est le plus grand degré de ses sommets.

Preuve *Soit un graphe, et r le degré maximum de ses sommets. Donnons nous une palette de* (r +1) *couleurs*.
Pour chaque sommet du graphe on peut tenir le raisonnement suivant : ce sommet est adjacent à r sommets au plus, et le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est donc inférieur ou égal à r. Il reste donc au moins une couleur non utilisée dans la palette, avec laquelle nous pouvons colorer notre sommet.

Propriété 2 Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.
Ce résultat découle de la définition même du nombre chromatique.

Conséquence Tout graphe qui contient un sous-graphe complet d'ordre *n* a un nombre chromatique supérieur ou égal à *n*.

D Algorithme de coloration de Welsh et Powell

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne *coloration d'un graphe, c'est à dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).*

Étape 1

Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.
On obtient une liste ordonnée de sommets X_1, X_2,..X_n tels que :

$$\text{degré } (X_1) \geq \text{degré } (X_2) \geq \ldots \geq \text{degré } (X_n).$$

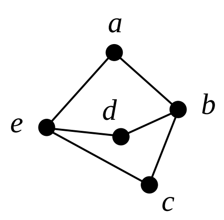
Étape 2

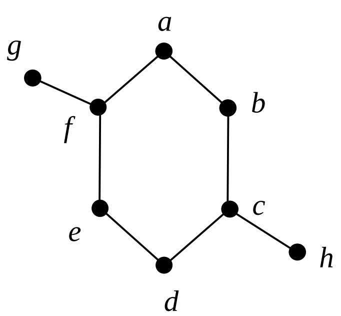
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

Étape 3

S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2.
Sinon, la coloration est terminée.

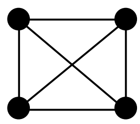
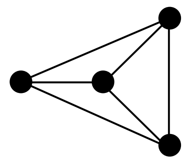
Appliquer cet algorithme aux deux graphes ci-dessous :





E Le grand théorème de coloration

Définition On appelle **graphe planaire** un graphe qui peut être dessiné sans croisement d'arêtes.

Attention : ce graphe  est planaire car on peut le représenter ainsi : 

Théorème des 4 couleurs (Appel et Haken 1977)

Tout graphe planaire est-coloriable en 4 couleurs.

Ce théorème n'a été démontré que grâce à l'utilisation d'ordinateurs, tant le nombre de cas à étudier est grand : 1482 configurations. Cet ensemble a été ramené à moins de 700 configurations (Robertson, Sanders, Seymour et Thomas, 1994) mais la démonstration utilise toujours l'ordinateur.

F Exercices

Exercice 1

Le directeur d'un petit zoo veut réorganiser l'habitat de telle sorte que les animaux cohabitent dans des enclos plus vastes. Malheureusement, il n'est pas possible de laisser tous les animaux ensemble dans un seul enclos, car certains sont les prédateurs des autres ! Le tableau ci-contre indique, parmi les dix races d'animaux que possède le zoo, lesquelles sont les prédateurs ou les proies des autres. Combien d'enclos le directeur du zoo doit-il prévoir ?

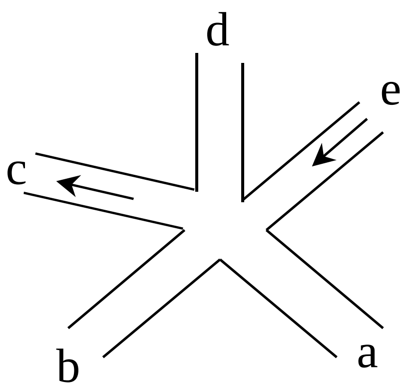
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a		*			*					*
b	*			*			*			
c								*		*
d		*				*				
e	*								*	
f				*						*
g		*								
h			*						*	
i					*			*		*
j	*		*			*			*	

Exercice 2

Sept agences de voyage Romaines proposent des visites de monuments et lieux touristiques : le Colisée, le Forum romain, le musée du Vatican et les Thermes de Caracalas.
Un même lieu ne peut être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour. La première compagnie fait visiter uniquement le Colisée ; la seconde le Colisée et le musée du Vatican ; la troisième les Thermes de Caracalas ; la quatrième le musée du Vatican et les Thermes de Caracalas ; la cinquième le Colisée et le Forum romain ; la sixième le Forum romain et les Thermes de Caracalas ; la septième le musée du Vatican et le Forum romain.
Ces agences peuvent-elles organiser les visites sur les trois premiers jours de la semaine ?

Exercice 3

Combien de feux sont nécessaires à ce carrefour pour minimiser le nombre de croisements de voitures ?



Exercice 4

Une école d'ingénieurs doit organiser les examens des enseignements optionnels de ses élèves de troisième année. Les différente options sont : Français (F) ; anglais (A) ; mécanique (M) ; sport (S) ; Internet (I) et dessin industriel (D).
Certains étudiants ont choisi plusieurs options, et les regroupements existants sont : (F,A,M) ; (D,S) ; (I,S) ; (I,M).
Combien de demi-journées seront-elles nécessaires à cette organisation sachant que la durée de chaque épreuve est d'une demi journée ?

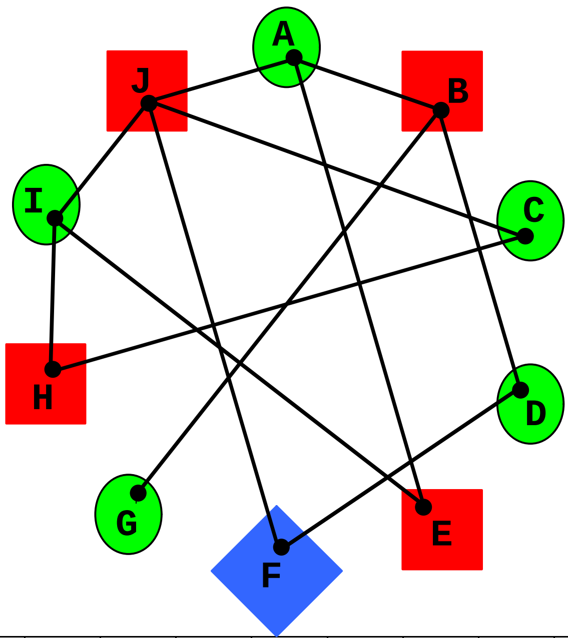
G Corrigés des exercices

1 Au zoo

Le directeur d'un petit zoo veut réorganiser l'habitat de telle sorte que les animaux cohabitent dans des enclos plus vastes. Malheureusement, il n'est pas possible de laisser tous les animaux ensemble dans un seul enclos car certains sont les prédateurs des autres ! Le tableau ci-dessous indique, parmi les dix races d'animaux que possède le zoo, lesquelles sont des prédateurs ou les proies des autres.

Combien d'enclos le directeur du zoo doit-il prévoir ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		X			X					X
B	X			X			X			
C								X		X
D		X				X				
E	X								X	
F				X						X
G		X								
H			X						X	
I					X			X		X
J	X		X			X			X	



sommet	**J**	**A**	**B**	**I**	**C**	**D**	**E**	**F**	**H**	**G**
n° couleur	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**

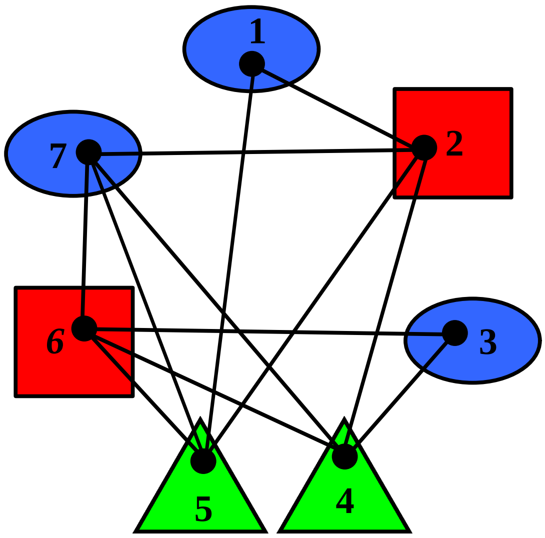
L'algorithme donne trois couleurs.
Le graphe contient un cycle d'ordre cinq : A B D F J ; on ne pourra pas obtenir moins de trois couleurs.

Le nombre chromatique de ce graphe est donc 3.

2 Agences de voyage

Sept agences de voyage Romaines proposent des visites de monuments et lieux touristiques : Le Colisée, le Forum romain, Le musée du Vatican et les thermes de Caracalas.
Un même lieu ne peut être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour. La première Compagnie fait visiter uniquement le Colisée ; la seconde le Colisée et le musée du Vatican; la troisième les thermes de Caracalas; la quatrième le musée du Vatican et les thermes de Caracalas ;la cinquième le Colisée et le Forum romain; la sixième le Forum romain et les thermes de Caracalas ; la septième le musée du Vatican et le forum romain.
Ces agences peuvent-elles organiser les visites sur les trois premiers jours de la semaine ?

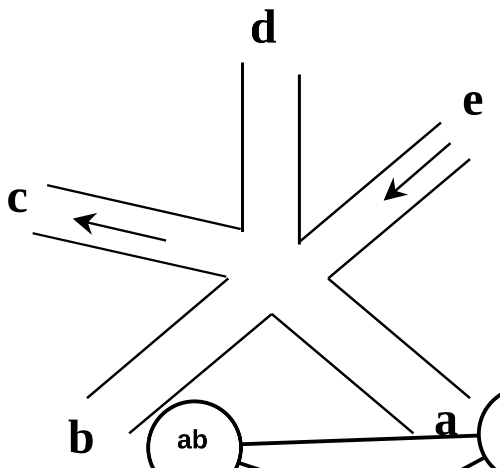
	Colisée	Forum	Vatican	Thermes
1	**X**			
2	**X**		**X**	
3				**X**
4			**X**	**X**
5	**X**	**X**		
6		**X**		**X**
7		**X**	**X**	

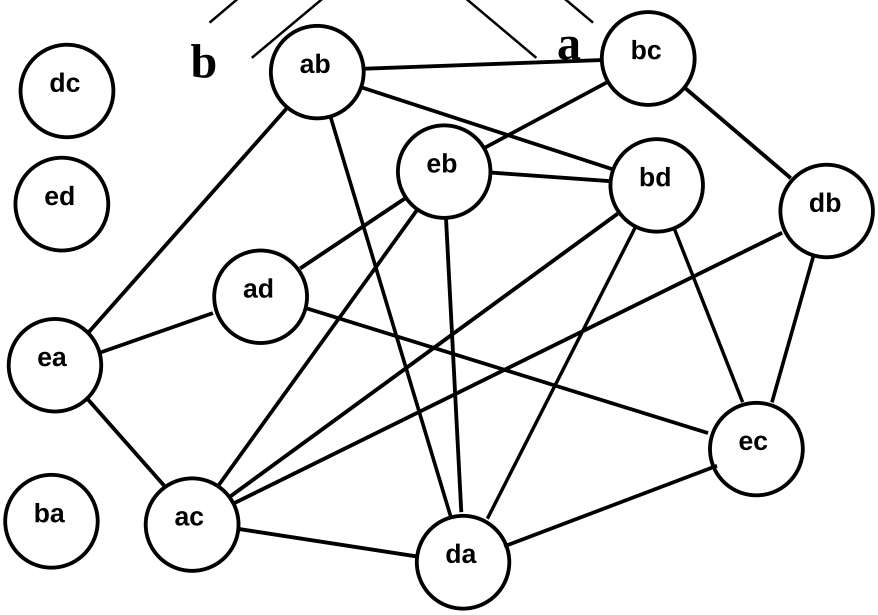


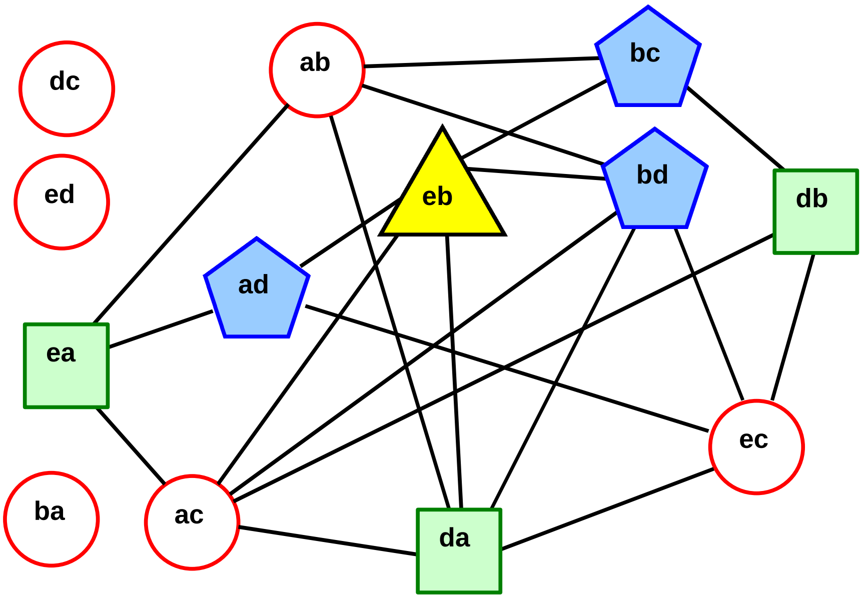
sommet	**2**	**4**	**5**	**6**	**7**	**1**	**3**
n° couleur	**1**	**2**	**2**	**1**	**3**	**3**	**3**

L'algorithme donne trois couleurs.
Le graphe contient un graphe complet d'ordre 3 : 1 2 5 ; on ne pourra pas obtenir moins de trois couleurs.
Le nombre chromatique de ce graphe est donc 3.

3 Problème de feux

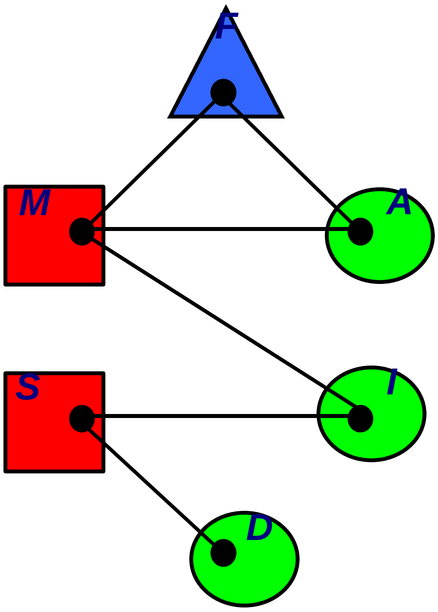






4 Examen

Une école d'ingénieurs doit organiser les examens des enseignements optionnels de ses élèves de troisième année. Les différente options sont : Français (F) ; anglais (A) ; mécanique (M) ; sport (S) ; Internet (I) et dessin industriel (D).
Certains étudiants ont choisi plusieurs options, et les regroupements existants sont : (F,A,M) ; (D,S) ; (I,S) ; (I,M).
Combien de demi-journées seront-elles nécessaires à cette organisation sachant que la durée de chaque épreuve est d'une demi journée ?

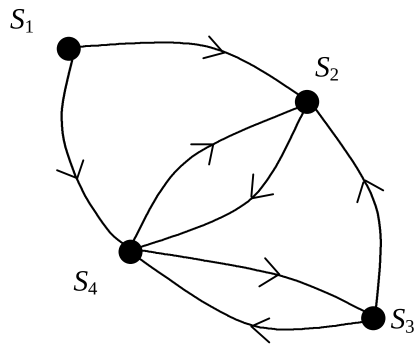


sommet	**M**	**A**	**F**	**I**	**S**	**D**
n° couleur	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**2**

L'algorithme donne trois couleurs.
Le graphe contient un graphe complet d'ordre 3 : F A M ; on ne pourra pas obtenir moins de trois couleurs.
Le nombre chromatique de ce graphe est donc 3.

IV Matrice associée à un graphe

A Problème



Un parcours de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc de la ville. Il est composé de chemins à sens unique, et de quatre points de repère tous distants de 500 mètres, comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Sur le schéma du parcours de santé, S_1 désigne l'entrée et S_4 la sortie. On fera l'hypothèse que tout trajet commence en S_1 et se termine en S_4.

Combien y a-t-il de trajets différents de

- 1,5 km ?
- 2 km ?
- 2,5 km ?

B Définition et propriété

Définition : La matrice associée à un graphe à *n* sommets S_1, S_2 ,…S_n est la matrice carrée $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a_{ij} = k$ si k est le nombre d'arêtes de S_i vers S_j.

La matrice associée au graphe précédent est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut faire au sujet de cette matrice un certain nombre de remarques telles que :

- *La somme des termes est égale au nombre d'arêtes du graphe orienté ;*
- *La première colonne est remplie de zéros : c'est la conséquence du fait qu'aucune arête n'a S_1 pour extrémité ;*
- *Il y a deux 1 sur la dernière ligne : cela traduit le fait que le sommet S_4 est à l'origine de deux arêtes ;*
- *La somme des termes de la quatrième colonne est 3 : interpréter ce nombre.*
-

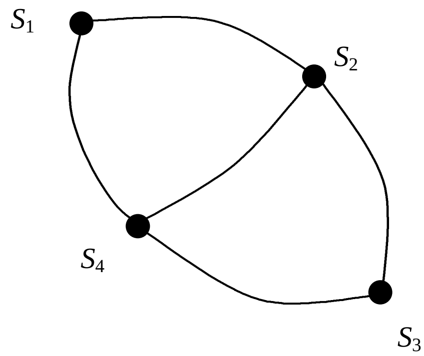
Propriété : Soit M la matrice associée à un graphe **G**. Le coefficient d'indice (ij) de la matrice M^n est le nombre de chaînes de longueur *n* reliant S_i à S_j.

Remarque : Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice associée est symétrique.

Résoudre alors le problème posé.

C Exercices

Exercice 1



On a réaménagé le parcours de santé de telle sorte que tous les chemins sont maintenant praticables dans les deux sens. Un sportif décide d'emprunter chaque jour un nouveau trajet de 2 kilomètres : combien de jours peut-il tenir cet engagement, sachant qu'il part de S_1 pour arriver en S_4 ?

Exercice 2

Un groupe de cyclistes décide de faire des randonnées chaque fin de semaine. Cinq villages ont été repérés, numérotés de 1 à 5. Dans la matrice M suivante, où les sommets sont numérotés par ordre croissant, si $a_{ij} = 1$ il existe un parcours intéressant du village *i* vers le village *j* d'environ 5 km.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Faire une représentation sagittale du graphe associé à la matrice M.
2) Un même parcours peut passer plusieurs fois par le même village, mais doit partir et revenir au même village ; il doit faire environ 15 km.
   Chacun des villages peut-il être choisi comme point de départ ? Préciser le nombre de parcours répondant aux critères précédents.

Exercice 3

Madame Desstress a décidé d'organiser un grand jeu, avec tous les élèves de toutes les classes pour le dernier jour de l'année. Elle a disposé dans la cour 5 plots formant les sommets d'un pentagone régulier. L'un est bleu : B ; un second est rouge : R et les autres sont orange : O , jaune : J et vert : V.
La règle du jeu est la suivante :

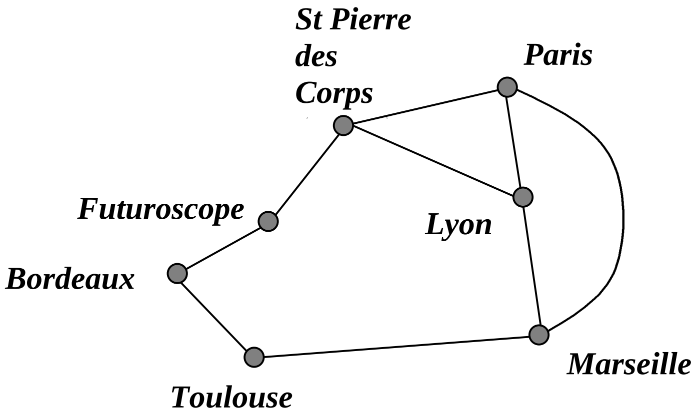
- Partir du plot B.
- Courir pour toucher trois plots sans les déplacer.
- On peut courir en empruntant une diagonale ou un côté du pentagone.
- On peut toucher plusieurs fois le même plot à condition que ce ne soit pas deux fois de suite.
- Finir le parcours par le plot rouge.
- Ne pas emprunter un chemin déjà parcouru par un camarade.

Mme Desstress note au fur et à mesure les parcours. Par exemple (B, V, R, B, R), (B, R, B, V, R)… L'ordre intervient dans la détermination d'un parcours.
Elle prévient ses élèves : « *ne tardez pas trop à jouer, car plus vous attendrez, plus ce sera difficile de trouver un nouveau chemin. Les trois derniers auront perdu, car tous les parcours possibles auront été réalisés.* »
Combien Mme Desstress a-t-elle d'élèves ?

V Meilleurs chemins

A Exemple

Un voyageur souhaite se rendre de Marseille au Futuroscope en train. D'une carte du réseau TGV, il a extrait le schéma ci-contre :



Les guides donnent par ailleurs les temps suivants :

Marseille – Lyon : 1h50	Lyon – Paris : 2h15	St Pierre des corps – Futuroscope : 30 '
Marseille – Paris :3h	Lyon – St Pierre des corps : 3h	Futuroscope - Bordeaux : 2h10
Marseille -Toulouse : 3h	Paris – St Pierre des corps : 1h	Toulouse – Bordeaux : 2h10

Quel trajet conseilleriez-vous à ce voyageur ? (On négligera dans cet exercice les temps de correspondance).

B Quelques définitions

Graphe pondéré

On appelle graphe pondéré, un graphe dont les arêtes (ou les arcs s’il est orienté) ont été affectées d'un nombre appelé poids.

Dans les exemples étudiés ici, les poids affectés à chaque arête seront toujours positifs. Cette condition est assez banale lorsque les poids représentent par exemple des coûts, des distances, ou des temps. Elle n'est pas toujours réalisée lorsque par exemple les poids représentent des flux.

Poids d'une chaîne

C'est la somme des poids des arêtes qui constituent la chaîne. On parlera aussi, selon le contexte, de longueur de la chaîne.

Plus courte chaîne d'un sommet à un autre

C'est, de toutes les chaînes qui relient deux sommets, celle de longueur minimale.

Remarque 1 : *L'existence de cette chaîne est assurée si tous les poids sont positifs. Dans le cas contraire, il faudrait exiger que le graphe soit sans cycle.*

Remarque 2 : *A priori, cette chaîne n'est pas unique.*

Remarque 3 : *On définirait de même la chaîne la plus longue (pour des graphes sans cycle).*

C Algorithme de Dijkstra

Les données sont : un graphe G, un sommet de départ s. On associe à chaque sommet x le coût du meilleur chemin connu appelé poids(x). On mémorise également, pour chaque sommet, le voisin par lequel on « arrive » pour réaliser le meilleur chemin connu.
Soit S l'ensemble de tous les sommets et Π l'ensemble des sommets optimaux.

Initialisation
    poids(s) $\leftarrow 0$
    poids(x) $\leftarrow +\infty$ pour $x \neq s$
    $\Pi \leftarrow \varnothing$

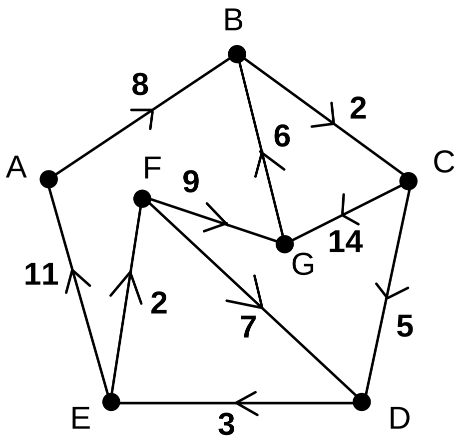
début
    Tant que $\Pi \neq$ S
        choisir un sommet $x \notin \Pi$ de poids minimum
        $\Pi \leftarrow \Pi \cup \{x\}$
        pour tout voisin y de x n'appartenant pas à Π
            si poids(x) + valeur(x y) < poids(y)
            alors   poids(y) $\leftarrow$ poids(x) + valeur(x y)
                     mémoriser en y que l'on vient de x
            fin si
        fin pour tout
    fin tant que

Cet algorithme donne tous les plus courts chemins de s vers tous les autres sommets.

D Exercices

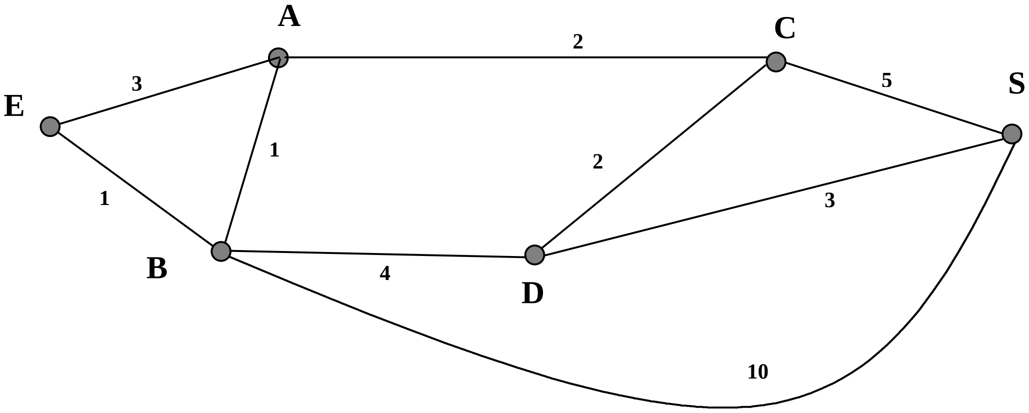
Exercice 1

Déterminer les plus courts chemins partant de C vers tous les autres sommets.
Même question en partant de F.



Exercice 2

Déterminer les plus courts chemins partant de E vers tous les autres sommets.

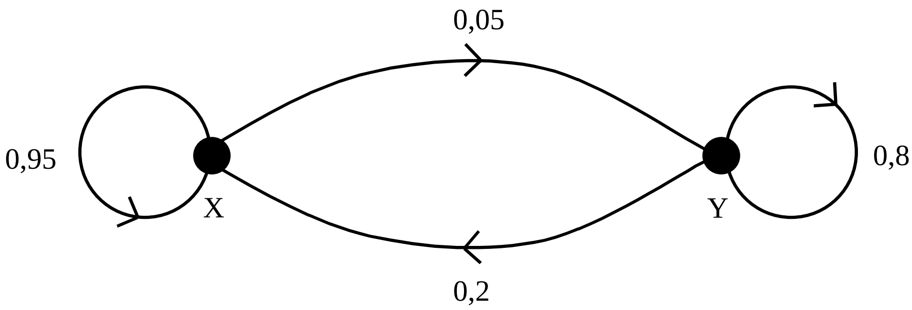


VI Matrices de transition

A Problème

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie et 20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur.
Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants est en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5 et 10 ans.

On construit un graphe correspondant à la situation :



Ensuite on peut s'intéresser à la matrice associée à ce graphe en prenant X et Y ans cet ordre, c'est-à-dire la matrice de changement d'état d'une année sur l'autre : M = $\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.
Pour avoir la population au bout d'un an, on multiplie le vecteur ligne (250000 750000) – qui représente la population en X et Y l'année 0 – par la matrice M :

$$(250000\ \ 750000)\times\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (387500\ \ 612500).$$

La population de X au bout d'un an est donc de 387500 habitants, celle de Y est de 612500.

Pour avoir la population au bout de 2 ans, on multiplie le vecteur ligne par M² et on obtient :

$$(250000\ \ 750000)\times\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^2 = (490625\ \ 509375).$$

De façon générale, on obtient la population des deux villes au bout de n années en multipliant le vecteur ligne de départ (250000 750000) par M^n.

Au bout de 5 ans : $$(250000\ \ 750000)\times\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^5 \approx (669482\ \ 330518).$$

Au bout de 10 ans : $$(250000\ \ 750000)\times\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^{10} \approx (769028\ \ 230972).$$

On constate une stabilisation de la population vers une répartition limite de 800000 habitants en X et de 200000 habitants en Y.

B Prolongements

Que se passe-t-il si on suppose

- que 99 % des habitants sont initialement en Y ou en X ?
- que la population est également répartie entre les deux villes (500000 dans chaque ville en l'année 0) ?

La question est de savoir si la répartition limite dépend de la répartition de départ ou bien uniquement de la matrice de transition ; en fait elle ne dépend que de la matrice de transition. Les coefficients de M étant des nombres positifs strictement inférieurs à 1, on a plusieurs renseignements sur le comportement des puissances de cette matrice ; en particulier M^n a une limite quand n tend vers l'infini. Dans cet exemple, la limite de M^n est la matrice m = $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Sur une calculatrice dont l'affichage a été fixé à trois décimales, on trouve :

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 0,811 & 0,189 \\ 0,755 & 0,245 \end{pmatrix} \; ; \; M^{20} = \begin{pmatrix} 0,801 & 0,199 \\ 0,797 & 0,203 \end{pmatrix} \; ; \; M^{30} = \begin{pmatrix} 0,800 & 0,200 \\ 0,800 & 0,200 \end{pmatrix}$$

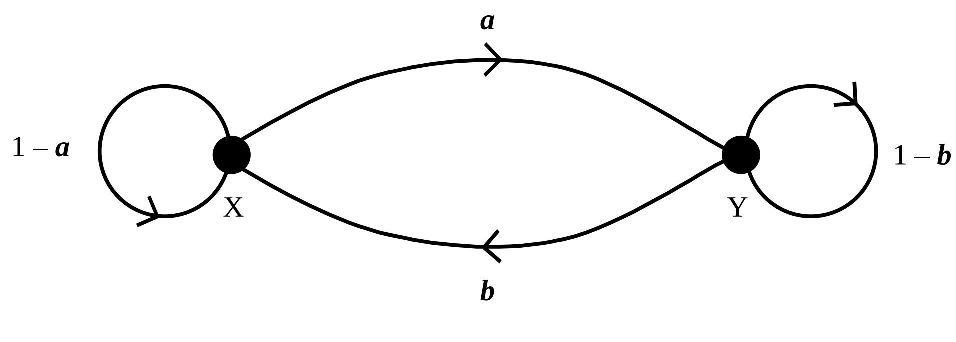
Les élèves devront connaître les résultats suivants :

Théorème Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, alors :

1) l'état P_k, à l'étape k, est donné par $P_k = P_0 \times M^k$;
2) P_k converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0 ;
3) l'état P vérifie l'égalité $P = P \times M$.

L'état stable P = $(x \,;\, y)$ s'obtient en résolvant un système de deux équations à deux inconnues.

C Cas général



La matrice de transition en prenant X et Y dans cet ordre est : M = $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ où a et b appartiennent à l'intervalle] 0 ; 1 [

On pose $\lambda = 1 - a - b$ et donc $|\lambda| < 1$.

On vérifie aisément que : M = N + λR où $N = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & \frac{-a}{a+b} \\ \frac{-b}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$.

On a : $M^2 = N^2 + \lambda\, N\times R + \lambda\, R\times N + \lambda^2 R^2$.
Mais $N\times R = R\times N = 0$, $N^2 = N$ et $R^2 = R$.

L'égalité se réduit donc à $M^2 = N + \lambda^2 R$.

On peut démontrer par récurrence que, pour tout n : $M^n = N + \lambda^n R$.

Et comme $|\lambda| < 1$, la limite de M^n quand n tend vers l'infini est la matrice N.

On obtient l'état stable $P = (x\,;\,y)$ en résolvant le système : $P\times M = M$ (qui ne donne qu'une équation) et $x + y = 1$; on trouve : $x = \frac{b}{a+b}$ et $y = \frac{a}{a+b}$.

D Exercices

Exercice 1

Refaire le problème précédent avec des coefficients de transition de 40 % (autrement dit, 40 % des habitants de X partent chaque année habiter en Y) et 20 % (de Y qui partent habiter en X).
Conjecturer la matrice limite.

Exercice 2

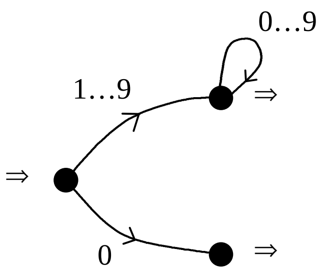
Sur un marché, deux produits A et B sont en concurrence (par exemple deux lessives).
On suppose que d'une année à l'autre, 60 % de la clientèle reste fidèle à A tandis que 30 % de la clientèle de B passe à A. Il n'y a pas de fuite de clientèle vers d'autres produits concurrents, et il n'y a pas abandon de consommation de ces produits.
On note $P_o = (a_0\ b_0)$ les parts de marché de A et B en 2000.
On veut calculer les parts de marché $P_n = (a_n\ b_n)$ de A et B en l'année $(2000 + n)$.

1) Calculer P_1, puis P_2.
2) a) Démontrer que $P_{n+1} = P_n\times M$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on précisera.
   b) En déduire que $P_n = P_0\times M^n$.
3) Vérifier que $M^2 - M = 0{,}3\,(M - I)$, où I désigne la matrice unité d'ordre 2.
   En déduire que : $M^n - M^{n-1} = (0{,}3)^{n-1}\,(M - I)$.
4) Calculer M^n et en déduire P_n.

VII Automates

A Premières notions

On s'intéresse aux langages reconnaissables, c'est-à-dire tels qu'il existe un automate qui puisse en reconnaître les mots. Un automate utilise un graphe dont les sommets sont des états et à chaque arc est associée la reconnaissance d'une ou plusieurs lettres. Un tel automate est obligatoirement fini ; il comporte une entrée et une ou plusieurs sorties. De plus l'automate est déterministe c'est-à-dire que, pour chaque mot entré, il n'existe qu'un parcours possible du graphe.



Exemple d'automate qui reconnaît tous les entiers dont l'écriture est normalisée (ne commençant pas par un 0).

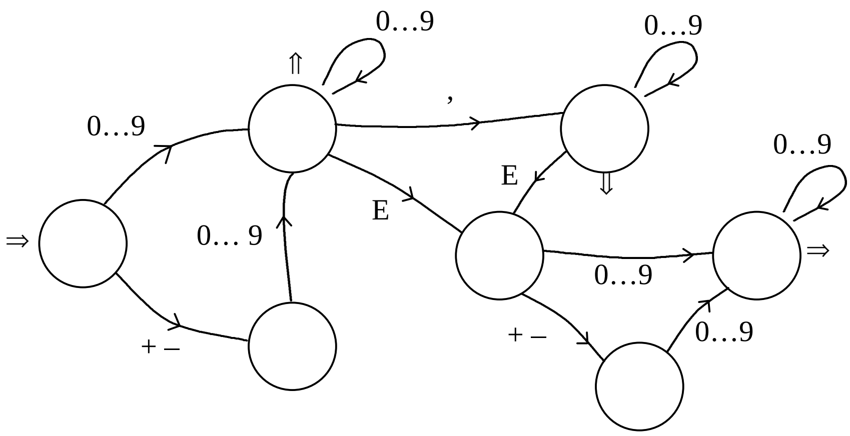
Donnons une définition formelle d'un automate.

Un automate $\mathcal{A}$ est défini par
- un alphabet A fini ;
- un ensemble fini Q d'états ;
- un état initial q_0 ;
- un sous-ensemble F de Q représentant les états terminaux ;
- une fonction de transition $\delta : Q \times A \to Q$

On le note : $\mathcal{A} = < A , Q , q_0 , F , \delta >$

B Étude d'un exemple

Voici un automate qui reconnaît une entrée numérique dans un tableur (par exemple : 12,3 ou 08 ou –15 ou 5E12 ou 14E–3).



C Exercices

Exercice 1

Construire un automate qui reconnaisse les multiples de 5.

Exercice 2

Construire un automate qui reconnaisse les multiples de 3.

Exercice 3

Construire un automate permettant de reconnaître un entier positif inférieur ou égal à 138.

Exercice 4

Construire un automate permettant de reconnaître un horaire donné sous la forme 12:15.

Exercice 5

Construire un automate permettant de reconnaître une date donnée sous la forme 02/05 (pour le 2 mai), en se limitant à l'année en cours…

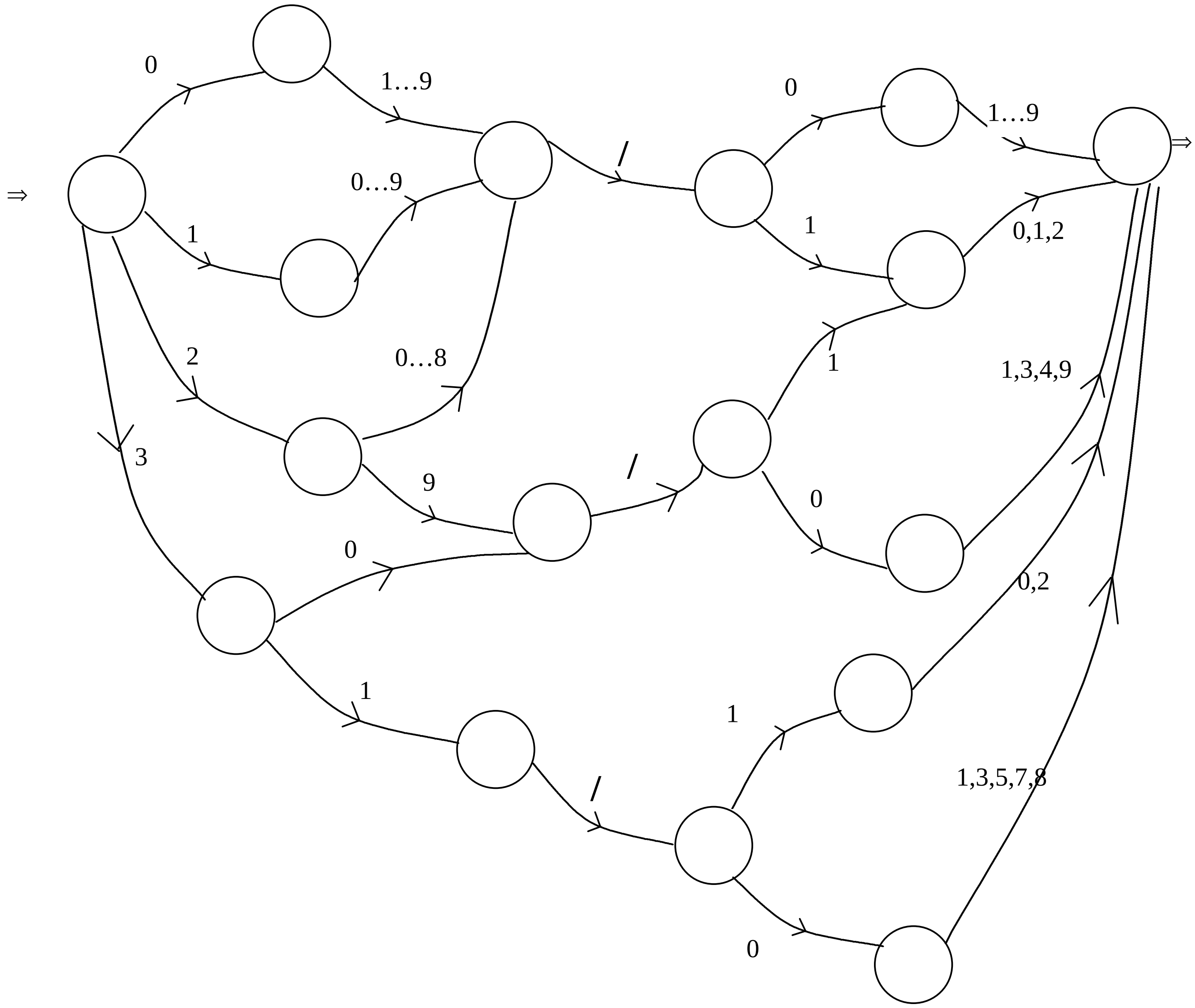
D Corrigés des exercices

Exercices 1, 2 3 & 4

Voir transparents

Exercice 5

Construire un automate permettant de reconnaître une date donnée sous la forme 02/05 (pour le 2 mai), en se limitant à l'année en cours…



Bibliographie – Liens

Livres

Une bonne lecture est : “Les graphes par l’exemple” de Droesbeke, Hallin et Lefevre, chez Ellipses.

Le livre de base en la matière était : “Graphes” de Claude Berge, chez Gauthier-Villars. Si on a de la chance, on peut trouver ce livre chez les bouquinistes car il est épuisé.

La revue Tangente a publié un numéro spécial (HS n°12) sur les graphes.

L'IREM Paris Nord a édité une brochure intitulée: "Théorie des graphes au lycée", par Ghislaine Gaudemet-Turck.

Enfin le document d’accompagnement du programme de terminale ES (publié par le CRDP) est évidemment incontournable.

Logiciels

Un logiciel gratuit est téléchargeable à l’adresse : http://www.geocities.com/pechv_ru/ ; il s’agit de GRIN40 qui permet de calculer le nombre chromatique d’un graphe, de déterminer un chemin le plus court… bref, qui fait presque tout mais sans forcément détailler.

Pour visualiser l’algorithme de Dijkstra, il faut se rendre à l’adresse :
http://www.jura.ch\lcp\cours\dm\dijkstra\index.html

Un outil pour tracer des graphes sous Cabri se trouve à l’adresse : http://www.ac-bordeaux.fr/
Pedagogie/Maths/peda/lyc/outils/graphes/constr_gra_auto/constr_gra_auto_intro.htm

Liens

Il suffit de chercher “graphes” dans un moteur de recherche pour avoir une multitude de réponses et de liens vers des documents intéressants.
Citons les académies de
Bordeaux : http://www.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/peda/lyc/graphes.htm
Versailles : http://euler.ac-versailles.fr:8080/webMathematica/graphes/sommaire.htm
Lyon : http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/panorama/documens/graphe2.pdf
et l’IREM de Marseille : http://www.irem.univ-mrs.fr/productions/graphes.pdf.

Contacts

Pour joindre les animateurs de ce stage :

Geneviève Dupin	*Genevieve.Dupin@ac-bordeaux.fr*
Marie-Dominique Grihon	*Marie-Domi.Grihon@ac-bordeaux.fr*
Anne Malibert	*Anne.Malibert@ac-bordeaux.fr*
Jean-Marc Bedat	*Jean-Marc.Bedat@ac-bordeaux.fr*
Jean-Louis Faure	*JeanLouis.Faure@ac-bordeaux.fr*
François Hache	*Francois.Hache@ac-bordeaux.fr*
Éric Sopéna	*sopena@labri.fr*